Б. И. АРГУНОВ и М. Б. БАЛК

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

Утверждено
Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва * 1957

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга составлена на основе опыта чтения авторами обязательных и факультативных курсов элементарной геометрии в педагогических институтах и предназначена служить учебным пособием для студентов физико-математических факультетов при изучении ими специального курса элементарной математики. Этим определяется объём данной работы и характер изложения.

Глава I посвящена вопросам обоснования конструктивной геометрии. Здесь выясняется содержание основных понятий, даётся аксиоматика этого раздела геометрии, излагается методика решения геометрической задачи на построение.

Главы II—VI посвящены изложению основных методов геометрических построений. Эти методы опираются на изучение геометрических мест точек, простейших геометрических преобразований и на применение алгебры. Несколько полнее, чем это обычно делается, рассмотрен в главе VI вопрос о возможности построения алгебраического выражения.

В главе VII рассматриваются некоторые задачи, не разрешимые циркулем и линейкой, приводятся различные способы решения классических задач средствами, отличными от циркуля и линейки, а также некоторые способы приближённого решения этих задач.

В главе VIII рассматривается вопрос о геометрических построениях при различных ограничениях. Приводятся доказательства теорем Мора-Маскерони и Штейнера. Заключительные параграфы этой главы посвящены геометрическим построениям с различными инструментами (двусторонняя линейка, угол, циркуль и линейка ограниченных размеров), а также построениям с недоступными точками.

В конце каждой главы приводятся вопросы для повторения и задачи для практических занятий.

В конце книги помещён список литературы, на которую делаются ссылки в тексте.

Основному тексту предпосылается краткий исторический обзор.

Авторы выражают признательность Л. С. Атанасяну и Е. Г. Шульгейферу, которые просмотрели эту работу в рукописи и помогли авторам своими замечаниями.

Авторы

22 февраля 1955 г.
Смоленск

ОТ АВТОРОВ

В настоящем втором издании исправлены замеченные нами опечатки и погрешности. Внесены также некоторые дополнения в соответствии с новой программой для педагогических институтов.

ВВЕДЕНИЕ

Геометрические построения привлекли внимание древнегреческих математиков ещё в VI—V вв. до нашей эры. Ими занимались почти все крупные греческие геометры: Пифагор (VI в. до н. э.) и его ученики, Гиппократ (V в. до н. э.), Евклид, Архимед, Аполлоний (III в. до н. э.), Папп (III в. н. э.) и многие другие.

Математики из школы Пифагора уже сумели справиться с такой сравнительно сложной задачей, как построение правильного пятиугольника. В V в. до н. э. возникли знаменитые классические задачи о квадратуре круга, об удвоении куба, о трисекции угла (см. гл. VII). Эти задачи, которые, как оказалось впоследствии, не разрешимы с помощью циркуля и линейки, в течение многих веков вызывали живейший интерес различных исследователей. В IV в. до н. э. греческие мыслители разработали ту общую схему решения геометрической задачи на построение (анализ — построение — доказательство — исследование), которой мы пользуемся и поныне.

Вся история геометрии и некоторых других разделов математики тесно связана с развитием теории геометрических построений. Важнейшие аксиомы геометрии, сформулированные основоположником научной геометрической системы Евклидом около 300 г. до н. э., ясно показывают, какую роль сыграли геометрические построения в формировании геометрии. „От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию", „Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать", „Из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг" — эти постулаты Евклида явно указывают на основное положение конструктивных методов в геометрии древних.

Древнегреческие математики считали „истинно геометрическими“ лишь построения, производимые циркулем и линейкой, не признавая „законным“ использование других средств для решения конструктивных задач. При этом, в соответствии с постулатами Евклида, они рассматривали линейку как неограниченную и одностороннюю, а циркулю приписывалось свойство чертить окружности любых размеров. Эта традиция до сих пор сказывается в школьном курсе геометрии. С другой стороны, именно греки первые стали привлекать для геометрических построений другие средства, отличные от циркуля и линейки. Так, например, Платон около 400 г. до н. э. решал задачу об удвоении куба с помощью двух прямых углов. Архимед дал решение задачи о трисекции угла с помощью линейки с двумя пометками. Ту же задачу решали с помощью различных кривых Никомед (с помощью конхоиды), Диоклес (с помощью циссоиды), Папп и другие.

Древнегреческие геометры успешно справлялись с труднейшими задачами на построение с помощью циркуля и линейки. Так, например, Аполлоний Пергский решил известную задачу, носящую его имя: „Построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей“. Некоторые вопросы алгебры связывались в то время учёными с решением конструктивных задач. Например, решение уравнений первой и второй степени греки давали в геометрической форме. При этом корни уравнений находились с помощью определённых геометрических построений.

Средневековье мало дало в области развития конструктивной геометрии, хотя ею занимались многие математики этого времени. Достаточно сказать, что некоторые задачи, решённые древнегреческими математиками, оказались не под силу математикам первых полутора тысячелетий нашей эры. Так, например, задача Аполлония, решение которой было утрачено, была снова решена только в XVI в. (её решил известный французский математик Франсуа Виет).

Только в новое время (XVII—XX вв.) теория геометрических построений стала развиваться дальше главным образом в связи с созданием новых разделов математики. С другой стороны, и вопросы конструктивной геометрии наряду с другими стимулами способствовали созданию новых математических теорий и методов. В тесной связи с геометрическими построениями оказались аналитическая геометрия, проективная геометрия, начертательная геометрия, теория алгебраических уравнений (в частности, вопросы приводимости уравнений), теория алгебраических и трансцендентных чисел, теория аналитических функций.

Много внимания уделяли конструктивным задачам творцы современной математики: Декарт, Ферма, Ньютон, Паскаль, Эйлер, Гаусс и другие. Так, например, Декарт и Ньютон решали задачу о трисекции угла с помощью конических сечений. Независимо от Виета Декарт, Ньютон, Эйлер дали свои решения задачи Аполлония, а Ферма решил аналогичную задачу для пространства. Декарт, создатель аналитической геометрии, успешно применял метод координат к решению задач на построение.

В XVII—XIX вв. разрабатывается теория геометрических построений с помощью различных инструментов, отличных от принятых древними. Уже Леонардо да Винчи (1452—1519) рассматривал построения с помощью линейки и циркуля постоянного размаха. Датчанин Мор (1672) и итальянец Маскерони (1797) изучали построения, выполнимые циркулем, и обнаружили, что циркуль позволяет решить всякую конструктивную задачу, разрешимую циркулем и линейкой. К не менее интересным выводам приходят основоположники проективной геометрии Штейнер (1833) и Понселе (1822), исследовавшие геометрические построения, выполняемые линейкой при наличии начерченной окружности с отмеченным центром.

После работ этих авторов появляется ряд исследований о построениях с помощью двусторонней линейки (с параллельными краями), с помощью угольника и других инструментов. Один из крупнейших геометров конца XIX и начала XX в. Д. Гильберт в своей классической книге „Основания геометрии“ рассматривает построения с помощью линейки и эталона длины.

Ещё в XVIII в. (1774) швейцарец Ламберт рассматривал некоторые задачи на построение на ограниченном куске плоскости. Этот же вопрос о построениях „с недоступными элементами“ неоднократно изучался впоследствии, так как он представляет большой интерес для практики чертёжника и геодезиста.

Многовековые неудачные попытки решить классические задачи о квадратуре круга, об удвоении куба, о трисекции угла навели на мысль, что эти задачи вовсе не разрешимы циркулем и линейкой (такое предположение относительно задачи о квадратуре круга высказал ещё в XV в. Леонардо да Винчи, а позднее — Штифель и изобретатель известного измерительного прибора Нониус). В связи с этим возникла необходимость выяснить, какие задачи разрешимы циркулем и линейкой. Этот вопрос оказался тесно связанным с алгебраической проблемой разрешимости уравнений в радикалах (в частности, в квадратных радикалах). Замечательные исследования, проведённые в этой области К. Гауссом (1777—1855), позволили ему в 1796 г. полностью решить одну из наиболее трудных проблем конструктивной геометрии: каким должно быть натуральное число n, чтобы правильный n-угольник можно было построить циркулем и линейкой? Задача о квадратуре круга привела к глубоким исследованиям в области теории чисел, связанным с изучением свойств числа π. Эти исследования, которые были закончены лишь во второй половине XIX в., позволили доказать, что задача о квадратуре круга не разрешима циркулем и линейкой.

На базе накопленного фактического материала в конце XIX и в XX в. появляется ряд сочинений, обобщающих результаты теории геометрических построений,— работы Ф. Клейна и Энриквеса, „Теория геометрических построений“ А. Адлера и др. К работам такого рода относятся также недавно опубликованные книги Лебега [34], Бибербаха [33]*. Принципиальным вопросам теории геометрических построений посвящены глубокие исследования С. О. Шатуновского [28], [29]. Всеобщую известность получила превосходная книга И. И. Александрова „Методы решения геометрических задач на построение“, впервые вышедшая в 1881 г.; до сих пор она остаётся одним из лучших пособий по конструктивной геометрии.

Ряд интересных работ по теории и методике геометрических построений напечатан советскими учёными Н. Ф. Четверухиным, Д. Д. Мордухай-Болтовским и другими.

Геометрические построения в евклидовой плоскости, которые изучались древними и преимущественно изучаются и поныне, существенно зависят от аксиом евклидовой геометрии. В геометрии, созданной гениальным русским учёным Н. И. Лобачевским, имеет место иная система аксиом, а поэтому и теория геометрических построений во многом иная. Решение ряда важнейших задач на построение в неевклидовой плоскости было дано ещё в 1832 г. замечательным

---

* См. указатель литературы в конце книги.

венгерским математиком Я. Бояи (1802—1860). Фундаментальные исследования в этой области принадлежат советским учёным — Д. Д. Мордухай-Болтовскому и его ученикам, а также А. С. Смогоржевскому (см. об этом в [18]).

Большой практический интерес представляют приближённые способы решения геометрических задач на построение. Часто оказывается, что приближённый способ решения с точки зрения чертёжной практики значительно выгоднее и проще теоретически точного способа построения. В течение многовековой истории конструктивной геометрии были даны многие интересные приближённые способы решения знаменитых классических задач, а также и многих других задач. Ещё Архимед дал приближённый способ построения правильного семиугольника; из его же исследований можно вывести приближённый способ решения задачи о квадратуре круга. Приближённые методы геометрических построений составляют в настоящее время важную часть теории геометрических построений.

Практический и теоретический интерес представляют также исследования относительно критериев точности и сравнительной простоты различных способов решения той или иной задачи теми или иными средствами (так называемая *геометрография*).

В настоящее время теория геометрических построений представляет обширную и глубоко развитую область математики, связанную с решением разнообразных принципиальных вопросов, уходящих в другие ветви математики.

Изложение многих геометрических вопросов опирается на геометрические построения. Это особенно характерно для „доказательств существования“: существование центра окружности, вписанной в треугольник, существование подобных треугольников, существование параллельных прямых и др. доказывается с помощью построений.

Основные этапы решения геометрической задачи на построение характерны для плана решения любой содержательной математической задачи: анализ, синтез, доказательство и исследование являются его необходимыми элементами.

Теория геометрических построений составляет теоретическую основу практической графики: многие чертёжные приёмы опираются на решения геометрических задач на построение.

* * *

Геометрические построения могут сыграть серьёзную роль в математической подготовке школьника. Ни один вид задач не даёт, пожалуй, столько материала для развития математической инициативы и логических навыков учащегося, как геометрические задачи на построение. Эти задачи обычно не допускают стандартного подхода к ним и формального восприятия их учащимися. Задачи на построение удобны для закрепления теоретических знаний учащихся по любому разделу школьного курса геометрии. Решая геометрические задачи на построение, учащийся приобретает много полезных чертёжных навыков.

Глава I

ОСНОВАНИЯ КОНСТРУКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Общие аксиомы конструктивной геометрии

Фигурой в геометрии называют любую совокупность точек (содержащую по крайней мере одну точку).

Будем предполагать, что в пространстве дана некоторая плоскость, которую назовём *основной плоскостью*. Ограничимся рассмотрением только таких фигур, которые принадлежат этой плоскости.

Примерами фигур могут служить: точка; пара точек; прямая (рассматриваемая как совокупность принадлежащих ей точек); пара параллельных прямых; *отрезок* (фигура, состоящая из двух точек и всех точек прямой, лежащих между ними); *интервал*, или открытый отрезок (совокупность всех точек, лежащих между двумя данными точками прямой); *луч* (фигура, состоящая из некоторой точки прямой и всех точек этой прямой, расположенных по одну сторону от этой точки); окружность (совокупность всех точек плоскости отстоящих на данное расстояние от некоторой данной точки этой плоскости); круг (совокупность всех точек плоскости, расстояния которых от данной в этой плоскости точки не превышают длины данного отрезка) и др.

Одна фигура называется *частью* другой фигуры, если каждая точка первой фигуры принадлежит второй фигуре. Так, например, частями прямой будут: всякий лежащий на ней отрезок, лежащий на этой прямой луч, точка на этой прямой, сама прямая.

Соединением двух или нескольких фигур называется совокупность всех точек, принадлежащих хотя бы одной из этих фигур. Соединение фигур Φ_1 и Φ_2 обозначают так: $\Phi_1 + \Phi_2$ или $\Phi_1 \cup \Phi_2$.

Пример. Соединение двух лучей Am и Bn одной прямой может представлять собой: а) всю прямую (рис. 1,*а*); б) луч этой прямой (рис. 1,*б*); в) прямую без интервала (рис. 1,*в*).

Понятием соединения можно воспользоваться для определения некоторых фигур. Например, если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — n точек, то соединение отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ называется n-угольником.

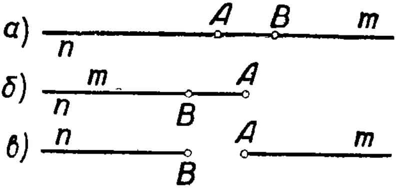

Рис. 1.

Пересечением, или общей частью двух или нескольких фигур, называется совокупность всех точек, которые являются общими для этих фигур. Пересечение двух фигур Φ_1 и Φ_2 обозначают так: $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ или $\Phi_1 \cap \Phi_2$.

Пример. Если расстояние прямой от центра окружности меньше радиуса этой окружности, то пересечение прямой с окружностью представляет пару точек. Если расстояние прямой от центра окружности равно радиусу окружности (случай касания), то пересечением будет одна точка (точка касания).

Разностью двух фигур Φ_1 и Φ_2 называется совокупность всех таких точек фигуры Φ_1, которые не принадлежат фигуре Φ_2. Разность фигур Φ_1 и Φ_2 обозначается так: $\Phi_1 \setminus \Phi_2$. Например, разность между прямой и лежащим на ней интервалом есть совокупность двух лучей, принадлежащих этой прямой.

Может оказаться, что пересечение (или разность) двух фигур не содержит ни одной точки. В этом случае говорят, что пересечение (или соответственно разность) данных фигур есть *пустое множество* точек. Так, пересечение прямой с окружностью будет пустым множеством, если расстояние прямой от центра окружности окажется больше радиуса этой окружности. Разность между интервалом прямой и всей прямой есть пустое множество.

Ясно, что если фигура Φ_1 есть часть фигуры Φ_2, то разность $\Phi_1 \setminus \Phi_2$ есть пустое множество. Нетрудно показать (способом от противного) и обратное: если разность $\Phi_1 \setminus \Phi_2$ — пустое множество, то фигура Φ_1 есть часть фигуры Φ_2.

***

Раздел геометрии, в котором изучаются геометрические построения, называют *конструктивной геометрией*. Основным понятием конструктивной геометрии является понятие *построить геометрическую фигуру*.

Мы примем это понятие *без определения*. Конкретный его смысл известен из практики, где оно означает то же, что „начертить", „провести" (линию), „отметить" (точку) и т. п. В интересах логической строгости изложения необходимо чётко формулировать те основные требования (постулаты), которыми характеризуется это понятие. Эти требования обычно не формулируются в условиях школьного курса элементарной геометрии, но они подразумеваются в процессе решения любой геометрической задачи на построение как нечто само собой разумеющееся. Основные требования (постулаты) конструктивной геометрии выражают в абстрактной форме наиболее существенные моменты чертёжной практики. Они являются аксиомами, принимаются без доказательства и служат в дальнейшем логической основой конструктивной геометрии. Перейдём к рассмотрению этих основных положений (аксиом) теории геометрических построений.

Если о какой-либо фигуре сказано, что она *дана*, то при этом естественно подразумевается, что она уже изображена, начерчена, т. е. построена. Таким образом, первое основное требование конструктивной геометрии состоит в следующем:

I. Каждая данная фигура построена.

Заметим, что не следует смешивать понятия „данная фигура" и „фигура, *заданная* (или *определённая*) такими-то данными её элементами". В последнем случае дана не сама фигура, а лишь некоторые её элементы, которые определяют положение этой фигуры. Например, если даны две точки прямой, то существует единственная прямая, соединяющая эти точки, т. е. эта прямая определена двумя точками, но это не означает, что прямая эта построена (начерчена). Точно так же центр O и точка A на окружности определяют эту окружность по величине и положению, но если сказано только, что даны точки O и A, то ещё не следует считать (в том смысле, как это понимается в конструктивной геометрии), что дана сама окружность.

Представим себе, что построена полуокружность AmB (рис. 2), а также построена и полуокружность AnB. Конечно, после этого надо считать, что построена вся окружность $AmBnA$. Точно так же, если построен луч AM некоторой прямой (рис. 3), а затем луч BN той же прямой, то, естественно, считается, что построена прямая MN, являющаяся соединением этих лучей. Если построены три отрезка AB, BC и CA, то нет надобности строить что-либо ещё, чтобы построить треугольник ABC. Эти примеры разъясняют смысл следующего постулата:

II. Если построены две (или более) ***фигуры, то построено и соединение этих фигур.***

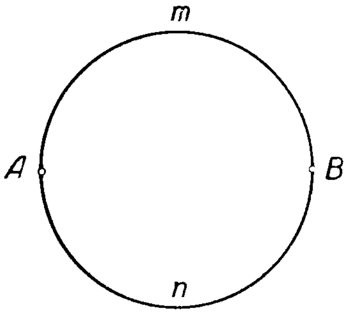

Рис. 2.

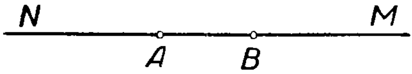

Рис. 3.

Представим себе, что построены два отрезка одной прямой: AB и CD. Естественно, считается возможным ответить на вопрос, принадлежит ли отрезок CD целиком отрезку AB (рис. 4*а*) или нет (рис. 4*б*). Если построена

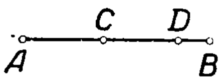

Рис. 4*а*.

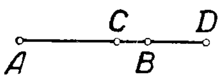

Рис. 4*б*.

окружность и точка, то при непосредственном рассмотрении чертежа можно ответить на вопрос, лежит ли построенная точка на построенной окружности или нет. Вообще, если построены две фигуры, то считается известным, является ли одна из них частью другой или нет. А так как фигура Φ_1 является частью фигуры Φ_2 в том и только в том случае, когда разность $\Phi_1 \setminus \Phi_2$ представляет собой пустое множество, то третье основное требование теории геометрических построений можно выразить в следующей форме:

III. Если построены две фигуры, то можно установить, является ли их разность пустым множеством или нет.

Пусть A, B, C, D — 4 точки прямой (рис. 5). Допустим, что отрезки AC и BD построены. Тогда мы, конечно, будем считать построенными как отрезок* AB, который является разностью отрезков AC и BD, так и отрезок*

* Точнее — полуинтервал.

CD, который является разностью отрезков BD и AC. Другой пример: если построена окружность и на ней точка, то мы считаем построенной также ту фигуру, которая останется, если из окружности удалить эту точку, т. е. считаем построенной разность между окружностью и точкой.

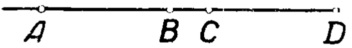

Рис. 5.

IV. Если разность двух построенных фигур не является пустым множеством, то эта разность построена.

Построив две прямые, мы всегда считаем возможным сказать, пересекаются они или нет. Точно так же, если две окружности построены, то мы считаем возможным установить (по чертежу), имеют ли они общие точки. Это же относится к любым двум построенным фигурам. Таким образом:

V. Если две фигуры построены, то можно установить, является ли их пересечение пустым множеством или нет.

С точки зрения чертёжной практики последнее условие отражает определённые требования к качеству выполненных чертежей. Так, например, если построены некоторая окружность и точка, то должно быть ясно, лежит ли точка на окружности или нет. Если построены две окружности, то можно сказать, имеют ли они общие точки или нет.

Обратимся ещё раз к рисунку 5. Пусть известно, что построены отрезки AC и BD. В этом случае мы будем также считать построенным и отрезок BC, который является пересечением этих двух отрезков. Если начерчены две пересекающиеся окружности, то мы будем считать построенной также пару точек их пересечения. Такого рода соглашения выражаются следующим образом.

VI. Если пересечение двух построенных фигур не пусто, то оно построено.

В следующих трёх основных требованиях говорится о возможностях *построения* отдельных точек.

VII. Можно построить любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют.

VIII. Можно построить точку, заведомо принадлежащую построенной фигуре.

IX. Можно построить точку, заведомо не принадлежащую построенной фигуре*.

В дальнейшем требования I—IX этого параграфа мы будем называть *общими аксиомами* конструктивной геометрии.

§ 2. Дополнительные замечания об аксиомах конструктивной геометрии

Система аксиом I—IX, изложенных в § 1, не является независимой. В настоящем параграфе мы сформулируем систему четырёх аксиом и покажем, что все аксиомы I—IX следуют из этой системы аксиом или содержатся в ней.

Как уже отмечалось выше, мы всегда предполагаем, что все рассматриваемые фигуры расположены в некоторой плоскости, которую мы условились называть *основной* плоскостью.

Аксиома 1. Основная плоскость построена.

Аксиома 2. Если построены две фигуры, то можно установить является ли их разность пустым множеством или нет.

Аксиома 3. Если разность двух построенных фигур не является пустым множеством, то эта разность также построена.

Следствие 1. Если две фигуры построены, то можно считать известным, является ли их пересечение пустым множеством или нет.

В самом деле, пусть фигуры Φ_1 и Φ_2 построены. Обозначим через S_1 совокупность тех точек фигуры Φ_1, которые не принадлежат фигуре Φ_2, т. е. пусть $S_1 = \Phi_1 \diagdown \Phi_2$. Ясно, что S_1 можно представить также в виде: $S_1 = \Phi_1 \diagdown \Phi_1 \cdot \Phi_2$, так что $\Phi_1 = S_1 + + \Phi_1 \cdot \Phi_2$.

Если построены фигуры Φ_1 и Φ_2, то в силу аксиомы 2 известно, является ли разность $\Phi_1 \diagdown \Phi_2$ пустым множеством или нет. Если эта разность S_1 — пустое множество, то $\Phi_1 \cdot \Phi_2 = \Phi_1$ и мы можем сказать, что пересечение $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ не пусто. Если же $\Phi_1 \diagdown \Phi_2$ не пусто, то в силу аксиомы 3 считается построенной фигура $\Phi_1 \diagdown \Phi_2$, т. е. фигура S_1, и в силу аксиомы 2 известно, является ли $\Phi_1 \diagdown S_1$, т. е. $\Phi_1 \cdot \Phi_2$, пустым множеством или нет. Следствие доказано.

Следствие 2. Если построены две фигуры и их пересечение не пусто, то это пересечение должно считаться построенным.

Это вытекает из аксиомы 3 в силу соотношения: $\Phi_1 \cdot \Phi_2 = = \Phi_1 \diagdown S_1$.

Следствие 3. Если построены две фигуры, то их *соединение* должно считаться построенным.

Доказательство. Пусть Φ_1 и Φ_2 — две построенные фигуры, П — основная плоскость. Если хотя бы одна из фигур Φ_1 или Φ_2 совпадает с П, то утверждение верно в силу аксиомы I.

* Если не все точки плоскости принадлежат построенной фигуре.

Пусть Φ_1 отлично от П, а также Φ_2 отлично от П. В силу аксиомы 3 должны считаться построенными фигуры $F_1 = \Pi \diagdown \Phi_1$ и $F_2 = \Pi \diagdown \Phi_2$.

Воспользуемся теперь следующим тождеством (доказательство этого тождества см., например, в книге П. С. Александрова „Введение в общую теорию множеств и функций“, гл. I, § 2, формула 1): $\Phi_1 + \Phi_2 = \Pi \diagdown F_1 \cdot F_2$.

Если множество $F_1 \cdot F_2$ пусто, то $\Phi_1 + \Phi_2 = \Pi$ и, следовательно, фигура $\Phi_1 + \Phi_2$ должна считаться построенной в силу аксиомы 1. Если же $F_1 \cdot F_2$ не пусто, то фигура $\Phi_1 + \Phi_2$ также должна считаться построенной в силу аксиомы 3.

***Аксиома 4.** Если построены две фигуры, пересечение которых не пусто, то можно построить по крайней мере одну точку, принадлежащую этому пересечению.*

Следствие 4. Если построены две фигуры и n — какое-либо натуральное число, то всегда можно установить, содержит ли пересечение построенных фигур по крайней мере n различных точек или оно содержит менее, чем n, точек.

Для доказательства этого следствия заметим прежде всего, что, согласно следствию 1, можно сказать, является ли пересечение построенных фигур $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ пустым множеством или оно содержит хотя бы одну точку. В первом случае следствие, очевидно, справедливо. Во втором случае, согласно аксиоме 4, можно построить точку P', принадлежащую пересечению фигур $\Phi_1 \cdot \Phi_2$. В силу аксиомы 2 при этом будет известно, является ли пустым хотя бы одно из множеств $\Phi_1' = \Phi_1 \diagdown \{P'\}$ и $\Phi_2' = \Phi_2 \diagdown \{P'\}$, а следовательно, является ли пустым множество $\Phi_1' \cdot \Phi_2'$. Если это множество пусто, то точка P' является единственной общей точкой фигур Φ_1 и Φ_2. Если же $\Phi_1' \cdot \Phi_2'$ не пусто, то в силу аксиомы 4 можно построить хотя бы одну точку P'', принадлежащую как фигуре Φ_1', так и фигуре Φ_2'.

Рассмотрим теперь фигуры

$$\Phi_1'' = \Phi_1 \diagdown \{P', P''\} \quad \text{и} \quad \Phi_2'' = \Phi_2 \diagdown \{P', P''\}.$$

Либо их пересечение пусто, и тогда Φ_1 и Φ_2 имеют лишь две общие точки P' и P'', либо их пересечение не пусто, и тогда можно построить третью общую точку фигур Φ_1 и Φ_2.

Повторяя это рассуждение, после конечного числа шагов мы получим ответ на поставленный вопрос: содержит ли пересечение $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ по крайней мере n точек или нет. Следствие доказано.

Следствие 5. Можно построить любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют.

Справедливость этого следствия непосредственно вытекает из хода доказательства следствия 4.

Следствие 6. Можно построить точку, заведомо принадлежащую построенной фигуре.

Доказательство. Пусть построена фигура Φ. Будем рассматривать её как пересечение двух фигур: $\Phi_1 = \Phi$ и $\Phi_2 = \Phi$, так что $\Phi = \Phi_1 \cdot \Phi_2$. В силу аксиомы 4 можно построить точку, принадлежащую пересечению $\Phi_1 \cdot \Phi_2$, т. е. фигуре Φ.

Следствие 7. Можно построить точку на основной плоскости, заведомо не принадлежащую построенной фигуре, если не все точки плоскости принадлежат этой фигуре.

Доказательство. Пусть на основной плоскости построена некоторая фигура Φ, отличная от всей плоскости. Тогда в силу аксиом 1 и 3 должна считаться построенной также фигура $\Pi \setminus \Phi$. В силу следствия 6 можно построить точку, принадлежащую фигуре $\Pi \setminus \Phi$, а значит, заведомо не принадлежащую Φ.

Что касается понятия „данная фигура", то ему можно придавать тот же смысл, что и понятию „построенная фигура".

§ 3. Инструменты геометрических построений

Аксиомы VII и VIII § 1 устанавливают возможность строить точки, принадлежащие уже построенной фигуре.

Аксиома IX позволяет строить некоторые новые точки, но этим точкам не приписывается никаких определённых свойств, кроме свойства быть новыми, ранее не построенными точками. Для построения новых точек, обладающих некоторыми определёнными, указанными свойствами, а также для построения линий пользуются различными „инструментами геометрических построений".

Для конструктивной геометрии необходимо располагать точным и для математических целей полным описанием того или иного инструмента. Такое описание даётся в виде аксиом. Эти аксиомы в абстрактной математической форме выражают те свойства реальных чертёжных инструментов, которые используются для геометрических построений.

Наиболее употребительными инструментами геометрических построений являются: линейка (односторонняя), циркуль, двусторонняя линейка (с параллельными краями) и некоторые другие.

Переходим к формулировке соответствующих аксиом.

А. Аксиома линейки. Линейка позволяет выполнить следующие геометрические построения:

а) построить отрезок, соединяющий две построенные точки;

б) построить прямую, проходящую через две построенные точки;

в) построить луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку*.

---

* Интересно заметить, что достаточно было бы постулировать только построение в), так как построения а) и б) можно вывести из него с помощью аксиом IV и II § 1.

Б. Аксиома циркуля. Циркуль позволяет выполнить следующие геометрические построения:

а) построить окружность, если построены центр окружности и отрезок, равный радиусу окружности (или его концы);

б) построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены центр окружности и концы этих дуг.

В. Аксиома двусторонней линейки. Двусторонняя линейка позволяет:

а) выполнить любое из построений, перечисленных в аксиоме А;

б) в каждой из полуплоскостей, определяемых построенной прямой, построить прямую, параллельную этой прямой и проходящую от неё на расстоянии h, где h — фиксированный для данной линейки отрезок (ширина линейки);

в) если построены две точки A и B, то установить, будет ли AB больше некоторого фиксированного отрезка h (ширина линейки), и если $AB > h$, то построить две пары параллельных прямых, проходящих соответственно через точки A и B и отстоящих одна от другой на расстоянии h.

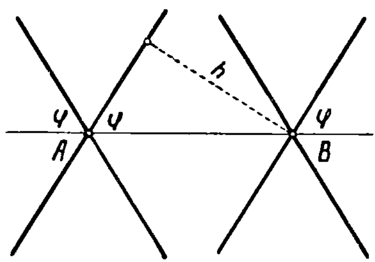

Рис. 6.

Реальное содержание пункта в) аксиомы В видно из рисунка 6. Из этого рисунка видно также, что каждая из упомянутых прямых образует с прямой AB угол $\varphi = \arcsin\frac{h}{AB}$, зависящий только от ширины линейки и расстояния AB.

Г. Аксиома прямого угла. Прямой угол позволяет:

а) выполнить построения, перечисленные в аксиоме линейки;

б) через данную точку плоскости провести прямую, перпендикулярную некоторой построенной прямой;

в) если построены отрезок AB и некоторая фигура Ф, то установить, содержит ли фигура Ф точку, из которой этот отрезок виден под прямым углом, и если такая точка существует, то построить такую точку.

Рисунок 7 поясняет смысл пункта в) аксиомы Г.

Помимо перечисленных инструментов, для геометрических построений можно пользоваться и другими инструментами: произвольным углом, угольником, линейкой с отметками, парой прямых углов, различными приспособлениями для вычерчивания специальных кривых и др. Примеры таких построений встретятся нам позднее. Пока мы заметим только, что геометрические построения производятся каждый раз с определёнными, наперёд указанными инструментами, причём каждый набор инструментов характеризуется определённой системой аксиом.

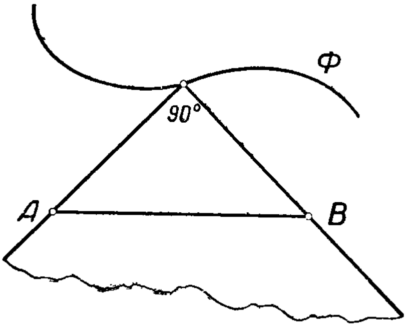

Рис. 7.

Построения, о возможности которых сказано в аксиомах VII—IX § 1, вместе с построениями, перечисленными в аксиомах тех инструментов, которые избраны для построения, мы в дальнейшем будем называть *основными* построениями (для данного набора инструментов).

В частности, циркуль и линейка позволяют выполнить следующие основные построения:

1. Построить отрезок, соединяющий две построенные точки (акс. А, а).

2. Построить прямую, проходящую через две построенные точки (акс. А, б).

3. Построить луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку (акс. А, в).

4. Построить окружность, если построены центр окружности и отрезок, равный радиусу окружности (или его концы) (акс. Б, а).

5. Построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены центр окружности и концы этих дуг (акс. Б, б).

6. Построить любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют (акс. VII § 1).

7. Построить точку, принадлежащую какой-либо построенной фигуре (акс. VIII § 1).

8. Построить точку, заведомо не принадлежащую какой-либо построенной фигуре (акс. IX § 1).

Подобным же образом можно составить список основных построений для любого указанного набора инструментов.

§ 4. Задача на построение

Задача на построение состоит в том, что требуется построить наперёд указанными инструментами некоторую фигуру, если дана некоторая другая фигура и указаны некоторые соотношения между элементами искомой фигуры и элементами данной фигуры.

Каждая фигура, удовлетворяющая условиям задачи, называется *решением* этой задачи.

Найти решение задачи на построение — значит свести её к конечному числу основных построений, т. е. указать конечную последовательность основных построений, после выполнения которых искомая фигура будет уже считаться построенной в силу принятых аксиом конструктивной геометрии. Перечень допустимых основных построений, а следовательно и ход решения задачи, существенно зависит от того, какие именно инструменты употребляются для построений.

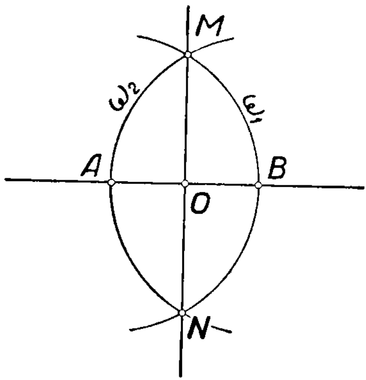

Рис. 8.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу: построить середину отрезка, заданного своими концами A и B.

Найдём решение этой задачи с помощью различных инструментов.

1. Циркулем и линейкой (рис. 8).

Строим последовательно:

1) прямую AB (основное построение 2 § 3);
2) окружность $\omega_1(A, AB)$ (осн. постр. 4)*;
3) окружность $\omega_2(B, BA)$;

---

* Здесь и в дальнейшем символ $\omega(O, PQ)$ обозначает окружность ω с центром O и радиусом PQ.

4) общие точки M и N окружностей ω_1 и ω_2 (осн. постр. 6);

5) прямую MN (осн. постр. 2);

6) общую точку O прямых AB и MN (осн. постр. 6). Легко убедиться, что $AO = BO$, т. е. точка O искомая.

2. Циркулем (рис. 9).

Строим последовательно:

1) окружность $\omega(B, BA)$ (акс. Б, а, § 3);

2) окружность $\omega_1(A, AB)$;

3) общую точку C окружностей ω_1 и ω (акс. VII § 1);

4) окружность $\omega_2(C, CA)$;

5) общую точку D окружностей ω и ω_2, отличную от точки A;

6) окружность $\omega_3(D, DB)$;

7) общую точку E окружностей ω и ω_3, отличную от C.

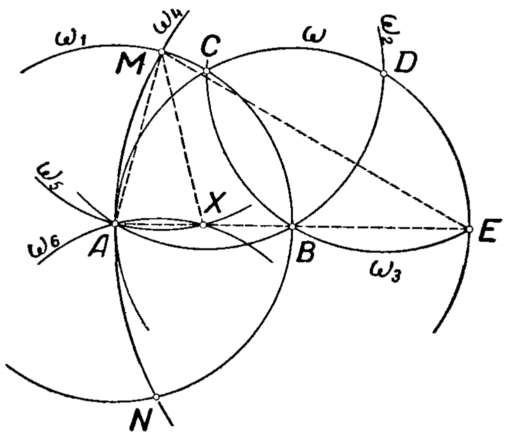

Рис. 9.

Заметим, что точки A, B и E расположены на одной прямой, причём $AE = 2AB$. Строим далее:

8) окружность $\omega_4(E, EA)$;

9) общие точки M и N окружностей ω_1 и ω_4;

10) окружность $\omega_5(M, MA)$;

11) окружность $\omega_6(N, NA)$;

12) общую точку X окружностей ω_5 и ω_6, отличную от A.

Нетрудно усмотреть, что точка X расположена на прямой AB.

Кроме того, треугольник AMX подобен треугольнику AEM, так как они равнобедренные и имеют общий угол MAE при основаниях. Поэтому $AX : AM = AM : AE$ или $AX : AB = AB : 2AB$, так что $AX = \frac{1}{2} AB$ и, значит, точка X искомая.

3. Двусторонней линейкой (рис. 10).

Строим последовательно:

1) прямую AB (акс. В, а, § 3);

2) прямую a, параллельную AB (акс. В, б) и проходящую на расстоянии h от неё (h — ширина линейки);

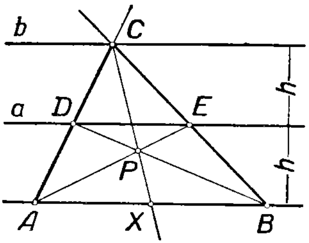

Рис. 10.

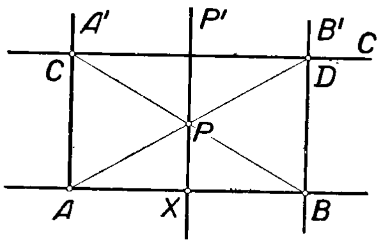

Рис. 11.

3) прямую b, параллельную a, отстоящую от неё на расстоянии h и отличную от прямой AB;

4) точку C на прямой b (акс. VIII § 1);

5) прямые AC и BC;

6) точки $D \equiv a \times AC$ и $E \equiv a \times BC$ (акс. VII § 1)*;

7) прямые AE и BD;

8) точку $P \equiv AE \times BD$;

9) прямую CP;

10) точку $X \equiv CP \times AB$.

Так как DE — средняя линия треугольника ACB, то AE и BD — его медианы, а следовательно, и CP — медиана, так что точка X искомая.

4. Прямым углом (рис. 11).

1) Строим прямую AB (акс. Г, а, § 3);

2) проводим прямые AA' и BB', перпендикулярные прямой AB (акс. Г, б);

3) выбираем на AA' произвольную точку C, отличную от A (акс. IV и VIII, § 1);

---

* Здесь и в дальнейшем запись $P \equiv a \times b$ означает, что точка P есть пересечение прямых a и b.

4) через точку C проводим $CC' \perp AC$.

Далее строим последовательно:

5) точку $D \equiv CC' \times BB'$ (акс. VII § 1);

6) прямые AD и BC;

7) точку $P \equiv AD \times BC$;

8) прямую $PP' \perp AB$;

9) точку $X \equiv PP' \times AB$.

Точка X искомая.

Может оказаться, что какая-либо задача на построение имеет несколько различных решений, т. е. существует несколько различных фигур, удовлетворяющих всем условиям задачи. Так, например, к двум данным внешнерасположенным окружностям можно провести, как известно, четыре различные общие касательные.

Решить задачу на построение — значит найти *все* её *решения*.

Последнее определение требует некоторых разъяснений. Фигуры, удовлетворяющие условиям задачи, могут различаться как формой или размерами, так и положением на плоскости. Различия в положении на плоскости принимаются или не принимаются в расчёт в зависимости от формулировки самой задачи на построение, а именно в зависимости от того, предусматривает или не предусматривает условие задачи определённое расположение искомой фигуры относительно каких-либо данных фигур. Поясним это примерами.

Рассмотрим следующую простейшую задачу: построить треугольник по двум сторонам и углу между ними. Точный смысл этой задачи состоит в следующем: построить треугольник так, чтобы две стороны его были соответственно равны двум данным отрезкам, а угол между ними был равен данному углу. Здесь искомая фигура (треугольник) связана с данными фигурами (два отрезка и угол) только соотношениями равенства, расположение же искомого треугольника относительно данных фигур безразлично. В этом случае легко построить треугольник ABC, удовлетворяющий условиям задачи. Все треугольники, равные треугольнику ABC, также удовлетворяют условиям задачи. Однако нет никакого смысла рассматривать эти треугольники как *различные* решения данной задачи, ибо они отличаются один от другого только положением на плоскости, о чём в условии задачи ничего не сказано. Будем поэтому считать, что задача имеет единственное решение.

Итак, если условие задачи не предусматривает определённого расположения искомой фигуры относительно данных фигур, то условимся искать только все неравные между собой фигуры, удовлетворяющие условиям задачи. Можно сказать, что задачи этого рода решаются „с точностью до равенства“. Это означает, что задача считается решённой, если: 1) построено некоторое число неравных между собой фигур Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n, удовлетворяющих условиям задачи, и 2) доказано, что всякая фигура, удовлетворяющая условиям задачи, равна одной из этих фигур. При этом считается, что задача имеет n различных решений.

Рассмотрим теперь задачу несколько иного содержания: построить треугольник так, чтобы одной его стороной служил данный отрезок BC, другая сторона была равна другому данному отрезку l, а угол между ними был равен данному углу α.

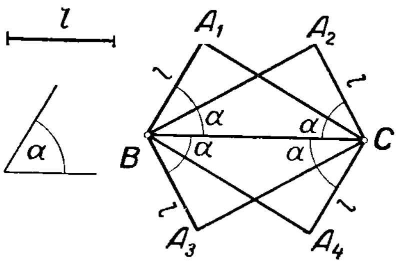

Рис. 12.

В этом случае условие задачи предусматривает определённое расположение искомого треугольника относительно одной из данных фигур (именно относительно отрезка BC). В связи с этим мы иначе смотрим на вопрос о построении *всех* решений этой задачи. Как видно из рисунка 12, может существовать до четырёх треугольников, удовлетворяющих условию этой задачи. Они равны между собой, но по-разному расположены относительно данной фигуры BC. В этом случае полное решение задачи предусматривает построение в с е х этих треугольников. Считается, что задача имеет до четырёх различных решений, различающихся своим расположением относительно данной фигуры.

Итак, если условие задачи предусматривает определённое расположение искомой фигуры относительно какой-либо данной фигуры, то полное решение состоит в построении всех фигур, удовлетворяющих условию задачи (если такие фигуры существуют в конечном числе). При этом даже равные фигуры, но различно расположенные относительно данных фигур, рассматриваются как различные решения данной задачи.

Встречаются задачи, имеющие бесконечно много решений. Таковы, например, задачи: построить окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой; построить прямую, касательную к данной окружности; построить окружность, проходящую через две данные точки. Такого рода задачи называют *неопределёнными*. Конечно, не может идти речь о построении всех решений неопределённой задачи. Когда же считать неопределённую задачу решённой?

Решение неопределённой геометрической задачи на построение проводится в известном смысле аналогично тому, как решаются в алгебре неопределённые уравнения или неопределённые системы уравнений. Решение неопределённого алгебраического уравнения или неопределённой системы алгебраических уравнений состоит в том, что искомые величины выражаются через один или несколько параметров, принимающих произвольные значения из некоторой определённой области. Например, решение системы

$$2x+3y+z=1$$
$$x+2y-z=3$$

представляется в виде:

$$z=t,\ y=5+3t,\ x=-7-5t,$$

где параметр t может принимать произвольные значения из области которая определяется условием задачи. Точно так же решение неопределённой геометрической задачи ищется в своего рода параметрической форме. Указывается приём построения фигур, удовлетворяющих условиям задачи, причём эти фигуры определяются выбором положения одной или нескольких произвольных точек на некоторых данных или построенных фигурах. Эти точки играют роль „геометрических параметров". Задача считается решённой, если при всевозможных допустимых положениях произвольных точек возникают все фигуры, удовлетворяющие условиям задачи.

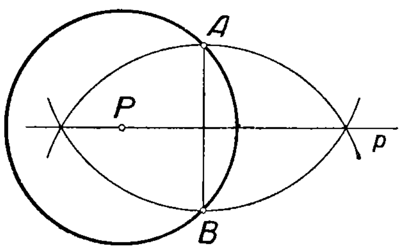

Рис. 13.

Поясним эти соображения примерами.

1. Построить окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой.

Изберём на данной прямой произвольную точку P. Строим окружности, имеющие данный радиус и касающиеся данной прямой в точке P. Таких окружностей две (построение их не вызывает затруднений). При *всевозможных* положениях точки P на данной прямой мы при том же приёме построения получим все окружности, удовлетворяющие условиям задачи. Задача считается решённой.

2. Построить окружность, проходящую через две данные точки A и B (рис. 13).

Проведём прямую p перпендикулярно отрезку AB через середину этого отрезка. Изберём на прямой p произвольную точку P и укажем приём построения окружности с центром P, проходящей через данные точки A и B. Замечаем, что при всевозможных положениях точки P на прямой p возникают все решения данной задачи. После этого считаем, что задача решена.

***

Может оказаться, что фигуры, обладающей указанными в задаче свойствами, вовсе не существует. Так, например, нельзя построить окружность, вписанную в данный прямоугольник, если он не является квадратом, нельзя построить общую касательную к двум концентрическим окружностям. Может случиться также, что решение задачи существует, но не может быть найдено данными средствами. Например, нельзя, конечно, построить прямую, соединяющую две данные точки, располагая только циркулем, или провести окружность, проходящую через три данные точки, располагая только линейкой. В дальнейшем нам встретятся более содержательные примеры этого рода. Так, в главе VII, § 1 будет показано, что задача о построении середины отрезка, которая решена выше различными инструментами, неразрешима, если пользоваться только односторонней линейкой. Во всех этих случаях решить задачу на построение — значит доказать, что искомая фигура не существует или, соответственно, что она не может быть построена данными средствами.

Иногда задача не имеет решений потому, что на искомую фигуру наложено слишком много условий. Например, нельзя, вообще говоря, построить окружность, проходящую через четыре заданные точки, или построить треугольник, зная три его стороны и один из углов. Задачи такого рода называются *переопределёнными*.

Для ориентировки полезно знать, сколько независимых условий обычно достаточно для определения искомой фигуры. Известно, что для построения треугольника (если по условию задачи его положение не фиксировано) достаточно знать три условия, например две стороны и угол. Можно показать, что для построения произвольного n-угольника нужно знать $2n-3$ условий (см. об этом, например, [25], стр. 25—26). Так, для построения четырёхугольника достаточно задать пять условий: например, указать, что он представляет трапецию, и задать две его стороны и две диагонали.

***

Условие задачи часто даёт известный простор в выборе данных. Так, например, если требуется построить треугольник по трём сторонам, то данными являются три отрезка, которые могут быть произвольными как по величине, так и по положению. Или если требуется провести касательную к данной окружности из данной точки, то данная окружность может быть любой окружностью на плоскости, причём данная точка может оказаться внутри, вне или на данной окружности. Задача в такой формулировке может считаться полностью решённой лишь в том случае, если она решена для всех возможных предположений относительно выбора данных. Может оказаться, что при одном выборе данных задача решается совершенно иначе, чем при другом их выборе, так что приходится рассматривать ряд отдельных случаев и давать решение задачи для каждого из них. Например, задача о проведении касательной к окружности через данную точку решается (циркулем и линейкой) по-разному в трёх возможных случаях:

1-й случай. Точка задана внутри окружности. Задача не имеет решения.

2-й случай. Точка расположена на данной окружности. Задача имеет единственное решение. Построение общеизвестно: достаточно провести радиус окружности в данную точку и провести через точку прямую, перпендикулярную к этому радиусу.

3-й случай. Точка расположена вне данной окружности. Задача имеет два различных решения. Соответствующее построение рассматривается в школьном курсе геометрии (см., например, [9], п. 128, 2).

В ближайших разделах излагается теория геометрических построений, производимых *циркулем* и *линейкой*, которая особенно важна для учителя средней школы. Изучение построений с этими инструментами даёт представление об основных идеях и методах конструктивной геометрии вообще. Некоторые сведения о построениях с другими инструментами приводятся в главах VII и VIII.

§ 5. Элементарные геометрические задачи на построение

Рассмотренные в § 4 примеры геометрических построений показывают, что непосредственное расчленение решения на основные построения даже в простейших задачах приводит к большому числу логических „шагов". В случае сколько-нибудь сложных задач это может привести к тому, что за общей логической структурой решения уследить будет трудно. Поэтому в практике решения геометрических задач на построение поступают несколько иначе.

Если найдено решение какой-либо задачи, то в дальнейшем разрешается пользоваться этим решением „в целом", т. е. не расчленяя его на основные построения.

Существует ряд простейших геометрических задач на построение, которые особенно часто входят в качестве составных частей в решение более сложных задач. Задачи такого рода рассматриваются преимущественно в первых главах школьного курса геометрии. Будем называть их *элементарными* геометрическими задачами на построение. Список элементарных задач является, конечно, условным. К числу элементарных задач относят обычно следующие:

1. Деление данного отрезка пополам.
2. Деление данного угла пополам.
3. Построение на данной прямой отрезка, равного данному.
4. Построение угла, равного данному.
5. Построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.
6. Построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой.
7. Деление отрезка в данном отношении.
8. Построение треугольника по трём данным сторонам.
9. Построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам.
10. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними.
11. Построение прямой, проходящей через данную точку и касающейся данной окружности.
12. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.

Первая из этих задач рассмотрена нами подробно в предыдущем параграфе. По этому образцу читателю следует составить для себя подробные решения остальных элементарных задач с помощью циркуля и линейки. Необходимые для этого указания можно найти в школьном учебнике геометрии. В дальнейшем мы будем пользоваться этими решениями без дополнительных разъяснений.

§ 6. Методика решения геометрической задачи на построение

В § 4 мы выяснили, что значит „решить задачу на построение". Вопрос о выборе той или иной *схемы решения* конструктивной задачи является чисто методическим вопросом.

Решение геометрической задачи на построение является вполне доброкачественным, если оно проведено, например, по следующей схеме:

1. Устанавливается конечное число случаев, исчерпывающих все возможности в выборе данных.

2. Для каждого случая даётся ответ на вопрос, имеет ли задача решения и сколько.

3. Для каждого случая, когда задача имеет решение, даётся способ нахождения (с помощью данных геометрических инструментов) каждого из возможных решений или устанавливается, что оно не может быть получено данными средствами.

В таком виде намечено решение задачи о проведении касательной к окружности через данную точку в конце § 4. Этой схемы придерживаются в научных статьях и монографиях; однако она мало пригодна для учебных целей, особенно в условиях средней школы.

При решении каждой сколько-нибудь сложной задачи на построение возникает вопрос о том, как нужно рассуждать, чтобы разыскать способ решения задачи, чтобы получить *все решения* задачи, чтобы выяснить условия возможности решения задачи и т. п. Поэтому при решении конструктивных задач в учебных условиях рекомендуется пользоваться известной схемой решения, состоящей из следующих четырёх этапов: 1) *анализ*; 2) *построение*; 3) *доказательство*; 4) *исследование*.

Конечно, эта схема не является безусловно необходимой и неизменной, не всегда удобно и целесообразно строго разделять отдельные её этапы и в точности осуществлять их в указанном порядке. Но по большей части указанная схема серьёзно помогает при решении конструктивных задач. Рассмотрим каждый этап этой схемы.

1. *Анализ.* Это подготовительный и в то же время наиболее важный этап решения задачи на построение, так как именно он даёт ключ к решению задачи. Цель анализа состоит в установлении таких зависимостей между элементами искомой фигуры и элементами данных фигур, которые позволили бы построить искомую фигуру. Это достигается с помощью построения чертежа-наброска, изображающего данные и искомые примерно в том расположении, как это требуется условием задачи. Этот чертёж можно выполнять „от руки“. Иногда построение вспомогательного чертежа сопровождают словами: „предположим, что задача уже решена“.

На вспомогательном чертеже следует выделить *данные* элементы и важнейшие *искомые* элементы. Практически часто удобнее начинать построение вспомогательного чертежа не с данной фигуры, а с примерного изображения искомой фигуры, пристраивая к ней данные так, чтобы они находились в отношениях, указанных в условии задачи. Например, если нужно построить треугольник по биссектрисе, медиане и высоте, проведённым из одной вершины, то при анализе удобнее сначала изобразить произвольный треугольник, а затем уже проводить в нём указанные в задаче линии.

Если вспомогательный чертёж не подсказывает непосредственного способа построения искомой фигуры, то пытаются обнаружить какую-либо часть искомой фигуры или вообще некоторую фигуру, которая может быть построена и которой затем можно воспользоваться для построения искомой фигуры. В более общем случае рассуждение ведётся следующим образом. Подмечают, что построение искомой фигуры Ф сводится к построению некоторой другой фигуры $Ф_1$. Затем подмечают, что построение фигуры $Ф_1$ сводится к построению фигуры $Ф_2$ и т. д. После конечного

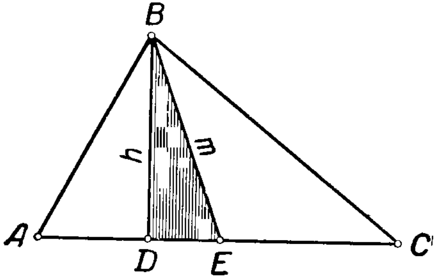

Рис. 14.

числа шагов можно прийти к некоторой фигуре $Ф_n$, построение которой уже известно.

Пусть, например, требуется построить треугольник по основанию и по медиане и высоте, проведённым к этому основанию. Рассматривая вспомогательный чертёж (рис. 14), замечаем, что треугольник *ABC* можно легко построить, если будет построен треугольник *BDE*: тогда останется только отложить по обе стороны от точки *E* на прямой *DE* отрезки, равные половине данного основания. Но треугольник *BDE* прямоугольный и строится по гипотенузе *m* и катету *h* (§ 5, элементарная задача 12).

Полезно учесть следующие частные замечания, помогающие при проведении анализа.

1) Если на вспомогательном чертеже не удается непосредственно заметить необходимые для решения связи между данными и искомыми элементами, то целесообразно ввести в чертёж вспомогательные фигуры: соединить уже имеющиеся точки прямыми, отметить точки пересечения имеющихся линий, продолжить некоторые отрезки и т. д. Иногда бывает полезно проводить параллели или перпендикуляры к уже имеющимся прямым.

Пусть, например, требуется построить прямую, проходящую через данную точку A и равноудалённую от двух данных точек B и C. Построение чертежа-наброска удобно начать с искомой фигуры: строим сначала прямую a (рис. 15),

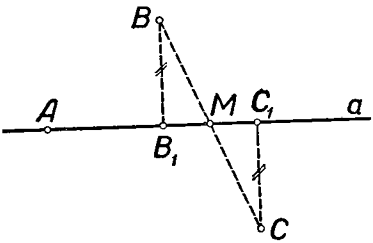

Рис. 15.

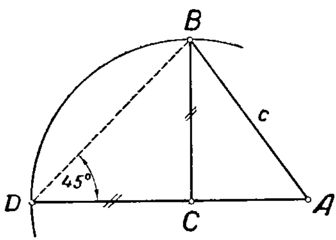

Рис. 16.

на ней выбираем точку A и на равных расстояниях от прямой a выбираем (по разные стороны от прямой) точки B и C. После этого ещё не возникают на чертеже такие связи, которые позволили бы решить задачу. Проведём к прямой a перпендикуляры BB_1 и CC_1, построим отрезок BC и отметим точку M пересечения отрезка BC с прямой a. Легко заметить, что M — середина отрезка BC, а отсюда уже ясен способ построения.

2) Если по условию задачи дана сумма или разность отрезков или углов, то эти величины следует изобразить на вспомогательном чертеже, если их ещё нет на нём.

Пусть, например, требуется построить прямоугольный треугольник по острому углу и сумме катетов. Изобразим какой-либо прямоугольный треугольник ABC (рис. 16). По условию даны: $\measuredangle\alpha$ и отрезок m. Искомый треугольник ABC должен удовлетворять условиям: $\measuredangle A=\alpha$, $AC+CB=m$, $\measuredangle C=90°$. Чтобы ввести в чертёж данный отрезок m, откладываем на продолжении стороны AC отрезок $CD = BC$; тогда $AD = m$. Легко построить треугольник ADB, так как в нём известны: сторона $AD = m$ и два угла: $\measuredangle A = \alpha$ и $\measuredangle D = 45°$ (элементарная задача 9, § 5). После построения треугольника ADB построение искомого треугольника сводится к элементарной задаче 6.

3) В процессе проведения анализа бывает полезно вспомнить теоремы и ранее решённые задачи, в которых встречаются зависимости между элементами, сходные с теми, о которых говорится в условии рассматриваемой задачи.

4) Проводя анализ на основании изучения некоторого чертежа-наброска, мы невольно связываем свои рассуждения в известной мере с этим чертежом. Так, в примере, иллюстрирующем пункт 1), мы избрали точки B и C по *разные* стороны от прямой a, в то время как можно было избрать их и *по одну сторону* от этой прямой. Тот способ решения, к которому мы приходим на основании анализа, может поэтому оказаться пригодным лишь для некоторых частных случаев. Чтобы получаемый нами способ решения был пригоден для возможно более широкого выбора

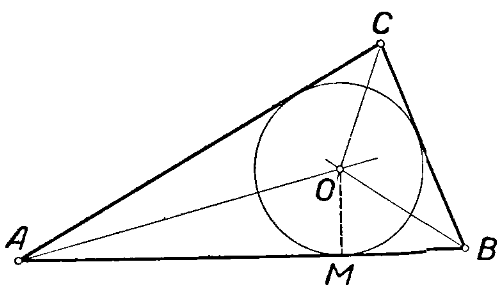

Рис. 17.

данных, желательно изображать искомую фигуру в возможно более общем виде. Например, искомый треугольник, если в условии задачи нет специального указания о его форме, надо изображать как разносторонний, четырёхугольник — как неправильный и т. п. Чем более общий случай мы разберём при анализе, тем проще будет провести в дальнейшем полное решение задачи.

Рассмотрим ещё один пример анализа. Требуется вписать окружность в данный треугольник. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 17). Чтобы вписать в него окружность, надо определить положение её центра и найти величину радиуса. Представим себе, что O — центр вписанной окружности, а OM — радиус, проведённый в какую-либо из точек касания окружности к сторонам треугольника (например, в точку касания окружности к стороне AB). Тогда отрезок OM перпендикулярен к прямой AB (см. [9], п. 113, 2). Поэтому OM — расстояние центра вписанной окружности от стороны треугольника AB. Так как все радиусы окружности равны, то центр окружности одинаково удалён от всех сторон треугольника и, следовательно, прямые OA, OB и OC служат биссектрисами (внутренних) углов треугольника ABC. Этих соображений, очевидно, достаточно для построения центра и определения радиуса искомой окружности.

2. Построение. Данный этап решения состоит в том, чтобы указать последовательность *основных* построений (или ранее решённых задач), которые достаточно произвести, чтобы искомая фигура была построена.

Построение обычно сопровождается графическим оформлением каждого его шага с помощью инструментов, принятых для построения.

В качестве примера обратимся опять к задаче о построении окружности, вписанной в данный треугольник ABC. Как показывает проведённый выше анализ этой задачи, для построения искомой окружности нужно последовательно построить (см. рис. 17):

1) биссектрисы каких-либо двух внутренних углов данного треугольника (2-я элементарная задача);

2) точку их пересечения O (§ 3, осн. постр. 6);

3) прямую, проходящую через точку O перпендикулярно прямой AB (6-я элементарная задача);

4) основание M проведённого перпендикуляра (осн. постр. 6, § 3);

5) окружность (O, OM) (осн. постр. 4, § 3).

3. Доказательство. Доказательство имеет целью установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям.

Так, чтобы провести доказательство правильности приведённого выше построения окружности, вписанной в данный треугольник, надо установить, что построенная нами окружность (O, OM) действительно коснётся всех сторон треугольника ABC. Для этого прежде всего заметим, что прямая AB касается проведённой окружности, так как эта прямая перпендикулярна к радиусу OM. Вместе с этим ясно, что радиус окружности равен расстоянию её центра от стороны AB данного треугольника ABC. Далее замечаем, что центр окружности O одинаково удалён от всех сторон треугольника, так как лежит на пересечении биссектрис углов треугольника. Следовательно, расстояние центра окружности от стороны AC или от стороны BC также равно радиусу построенной окружности, так что если провести через O перпендикуляры к сторонам треугольника AC и BC, то основания этих перпендикуляров (точки N и P на рис. 18) расположатся на той же окружности. Таким образом, каждая из прямых AC и BC перпендикулярна к соответствующему радиусу в конце его, лежащем на окружности, и поэтому каждая из этих прямых касается построенной окружности.

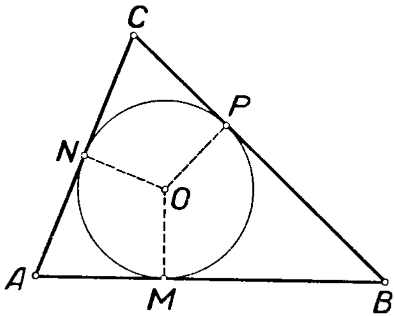

Рис. 18.

Доказательство обычно проводится в предположении, что каждый шаг построения действительно может быть выполнен.

4. Исследование. При построении обычно ограничиваются отысканием *одного* какого-либо решения, причём предполагается, что все шаги построения действительно выполнимы. Для *полного* решения задачи нужно ещё выяснить следующие вопросы: 1) всегда ли (т. е. при любом ли выборе данных) можно выполнить построение избранным способом; 2) можно ли и как построить искомую фигуру, если избранный способ нельзя применить; 3) сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных. Рассмотрение всех этих вопросов и составляет исследование. Таким образом, исследование имеет целью установить условия разрешимости и определить число решений.

Иногда ставится также задача: выяснить, при каких условиях искомая фигура будет удовлетворять тем или иным дополнительным требованиям. Например, может быть поставлен вопрос: при каких условиях искомый треугольник будет прямоугольным или равнобедренным? Или такой вопрос: при каких условиях искомый четырёхугольник окажется параллелограммом или ромбом?

Нередко школьники и даже учителя проводят исследование, в известной мере *произвольно* выбирая те или иные случаи, причём неясно, почему рассматриваются именно такие, а не какие-либо иные случаи. Остаётся неясным также, все ли возможные случаи рассмотрены. При исследовании решения сколько-нибудь сложной задачи такой подход может привести к потере решений, к тому, что некоторые случаи не будут рассмотрены.

Чтобы достигнуть необходимой планомерности и полноты исследования, рекомендуется проводить исследование „*по ходу построения*“. Сущность этого приёма состоит в том, чтобы перебрать последовательно все шаги, из которых слагается построение, и относительно каждого шага установить, всегда ли указанное на этом шаге построение выполнимо, а если выполнимо, то сколькими способами.

Для этого необходимо:

1) Выяснить, всегда ли существуют в действительности точки, прямые, окружности или другие фигуры, построеине которых предполагается осуществить на каждом шаге намеченного построения, или же их существование зависит от специального выбора положения или размеров тех или иных фигур. Например, если предполагается построить точки пересечения окружности с прямой, то надо заметить, что существование таких точек зависит от соотношения между радиусом этой окружности и расстоянием центра окружности от прямой.

Дальнейшее исследование надо проводить только для тех случаев, когда построение возможно, т. е. когда каждый шаг действительно приводит к построению искомых фигур.

2) Для каждого случая, когда решение существует, определить, сколько именно точек, прямых, окружностей и т. д. даёт каждый шаг построения. Например, если строятся точки пересечения окружности и прямой, то надо учесть, что таких точек будет две, если радиус окружности больше расстояния центра от прямой, и одна, если радиус окружности равен расстоянию центра от прямой.

3) Учитывая результаты исследования каждого шага, обратиться к задаче в целом и установить, при каких условиях расположения данных фигур или при каких соотношениях их размеров задача действительно имеет решение, а при каких его не существует. Если возможно, выразить условия разрешимости формулой (в форме неравенств или равенств).

4) Определить число возможных решений при каждом определённом предположении относительно данных, при котором эти решения существуют.

В итоге таких рассуждений решается вопрос о возможности построения *данным способом*. Но остаётся ещё открытым вопрос: не возникнут ли новые решения, если изменить как-либо способ построения? Иногда удаётся доказать, что всякое решение данной задачи совпадает с одним из уже полученных решений; в этом случае исследование можно считать законченным. Если же это не удаётся, то можно предположить, что задача имеет другие решения, которые могут быть найдены другими способами. В этих случаях полезно ещё раз обратиться к анализу и проверить, нет ли каких-либо иных возможных случаев расположения данных или искомых фигур, которые не были предусмотрены ранее проведённым анализом.

Для иллюстрации приведённых здесь соображений обратимся ещё раз к рассмотренному выше (стр. 32) примеру: построить прямую, проходящую через данную точку A и равноудалённую от двух данных точек B и C.

Согласно анализу, приведённому на странице 32, построение следует провести в таком порядке: 1-й шаг — построение отрезка BC; 2-й шаг — построение середины M отрезка BC; 3-й шаг — построение прямой AM, которая и является искомой.

Исследование должно проводиться примерно следующим образом. Первый шаг всегда выполни́м, притом однозначно: любые две различные точки можно соединить отрезком и только единственным. Однозначно выполни́м и второй шаг построения. Третий шаг построения всегда выполни́м: всегда можно провести прямую, соединяющую две данные точки. Но через две точки можно провести *единственную* прямую лишь в том случае, если эти точки различны; когда точки A и M совпадают, то через эти две точки проходит бесконечно много прямых. Итак: при нашем способе построения мы получим бесконечно много решений, если точка A служит серединой отрезка BC, и единственное решение во всех остальных случаях. Однако это не значит, что нельзя получить новые решения, проводя построение иначе. И действительно, более тщательное проведение анализа приведёт нас ещё к одному решению: прямая, проходящая через A и параллельная прямой BC (если такая прямая существует), также является решением задачи. Чтобы прийти к этому выводу, достаточно при анализе принять во внимание, что точки B и C могут быть расположены и по одну сторону искомой прямой.

Других решений быть не может. В самом деле, пусть прямая a' не проходит через середину отрезка BC и не параллельна ему (рис. 19). Обозначим через D точку её пересечения с прямой BC, а через BB' и CC' — перпендикуляры, проведённые из точек B и C на прямую a'. Так как $\triangle BB'D \sim \triangle CC'D'$, то $\frac{BB'}{CC'} = \frac{BD}{CD}$. Но из того, что прямая a' не проходит через середину отрезка BC, следует, что $BD \neq CD$ и поэтому $BB' \neq CC'$, т. е. прямая a' не может удовлетворять условию задачи.

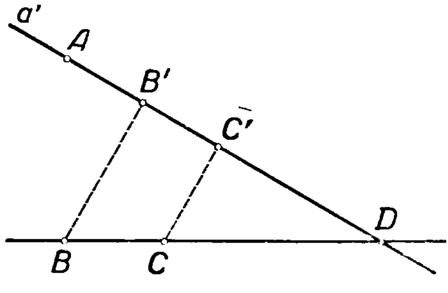

Рис. 19.

Приведённое исследование показывает, что задача имеет бесконечно много решений, если точка A является серединой отрезка BC, и имеет в точности *два* решения, если точка A не лежит на прямой BC. Если же A — произвольная точка прямой BC, не являющаяся серединой отрезка BC, то задача имеет *одно* решение.

§ 7. Примеры решения геометрических задач на построение

Приведём решения некоторых задач на построение.

Задача 1. Построить треугольник по основанию и двум медианам, проведённым к боковым сторонам.

Анализ. Допустим, что треугольник ABC (рис. 20) искомый, AB — основание, AM_1 и BM_2 — медианы, проведённые к боковым сторонам, P — точка пересечения медиан. По условию заданы отрезки c, m_1 и m_2 и требуется, чтобы $AB = c$; $AM_1 = m_1$; $BM_2 = m_2$. Построение треугольника ABC сводится к построению трёх точек — его вершин. Так как построение основания (т. е. отрезка AB) не вызывает затруднения, то задача сводится к построению вершины C. $C \equiv AM_2 \times BM_1$, так что нужно строить точки M_1 и M_2.

Точки M_1 и M_2 лежат соответственно на лучах AP и BP, причём точка M_1 удалена от A на расстояние m_1, а точка M_2

удалена от B на расстояние m_2. Поэтому задача сводится к построению точки P. Точку P можно построить как третью вершину треугольника ABP, если вершины A и B заданы, так как $AP = \frac{2}{3} m_1$, $BP = \frac{2}{3} m_2$, т. е. все стороны треугольника ABP известны.

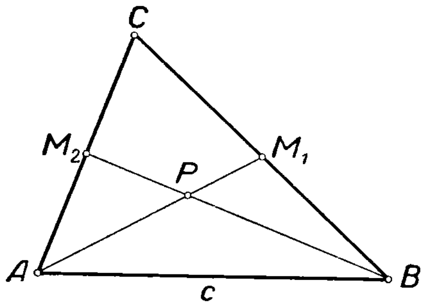

Рис. 20.

Построение. Строим последовательно:

1) отрезок AB, равный данному отрезку c (элементарная задача 3);

2) отрезок $r_1 = \frac{2}{3} m_1$ (элементарные задачи 7 и 3);

3) отрезок $r_2 = \frac{2}{3} m_2$;

4) треугольник ABP по трём сторонам: c, r_1 и r_2 (элементарная задача 8);

5) лучи AP и BP (осн. постр. 3 § 3);

6) точку M_1 на луче AP так, чтобы $AM_1 = m_1$ (элементарная задача 3);

7) на луче BP точку M_2 так, чтобы $BM_2 = m_2$;

8) точку $C \equiv AM_2 \times BM_1$.

Треугольник ABC искомый.

Доказательство. Если N_1 — середина AP, N_2 — середина BP, то четырёхугольник $M_1M_2N_1N_2$ — параллелограмм,

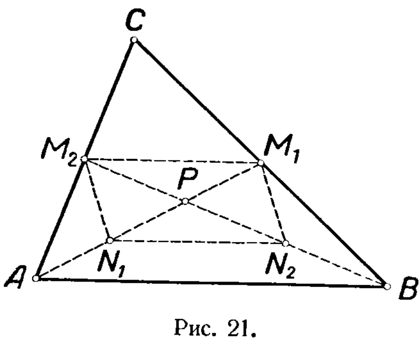

Рис. 21.

так как его диагонали взаимно делятся пополам (рис. 21). Следовательно, отрезки M_1M_2 и N_1N_2 равны и параллельны.

А так как N_1N_2 — средняя линия $\triangle APB$, то $M_1M_2 \| AB$ и $M_1M_2 = \frac{1}{2} AB$. Отсюда можно вывести, что отрезок M_1M_2 служит средней линией треугольника ABC, так что AM_1 и BM_2 действительно медианы этого треугольника.

Исследование. Построения 1), 2) и 3) всегда выполнимы. Для выполнимости построения 4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\frac{2}{3}|m_1 - m_2| < c < \frac{2}{3}(m_1 + m_2).$$

Построения 5), 6) и 7) всегда выполнимы. Покажем, что построение 8) также всегда можно осуществить.

Прямые AM_2 и BM_1 всегда пересекутся, притом по ту же сторону от прямой AB, где расположена точка P. В самом деле, если бы AM_2 была параллельна BM_1, то параллельные отрезки AB и M_2M_1 между параллельными прямыми AM_2 и BM_1 были бы равны, вопреки тому, что $M_2M_1 = \frac{1}{2} AB$ (см. доказательство). А если бы прямые AM_2 и BM_1 пересеклись по другую сторону от AB, то отрезок M_1M_2 был бы больше отрезка AB.

Итак, задача имеет решение при условии

$$\frac{2}{3}|m_1 - m_2| < c < \frac{2}{3}(m_1 + m_2).$$

При нашем способе построения решение единственно, так как каждый шаг построения выполняется однозначно (с точностью до равенства).

Для полного исследования нужно ещё показать, что ни при каком другом способе построения нельзя получить треугольник, удовлетворяющий всем условиям задачи, но не равный построенному нами треугольнику. Это равносильно предложению: если основание и „боковые“ медианы одного треугольника соответственно равны основанию и „боковым“ медианам другого треугольника, то такие треугольники равны. Доказательство этой несложной теоремы мы опускаем.

Задача 2. Две прямые a и b пересечены третьей прямой c. Построить отрезок, равный данному отрезку l, так, чтобы он был параллелен прямой c и концы его располагались на прямых a и b.

Анализ. Пусть AB (рис. 22) искомый отрезок, т. е. $AB = l$, $AB \parallel c$, $A \in a$, $B \in b$ *.

Для выяснения связей между данными и искомыми придётся ввести некоторые вспомогательные точки и линии.

Пусть $P \equiv c \times b$. Проведём $AM \parallel b$, и пусть $Q \equiv AM \times c$. Тогда $PQ = AB = l$, так как четырёхугольник $ABPQ$ — параллелограмм.

Для построения отрезка AB достаточно определить положение точки A, что сводится к построению точки Q. В свою очередь построение точки Q не вызывает затруднений.

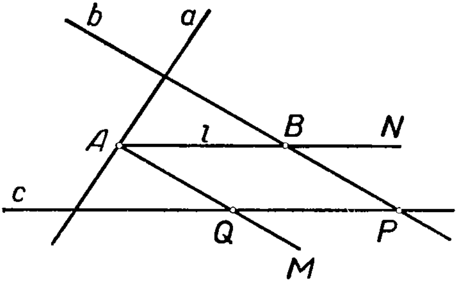

Рис. 22.

Построение. 1) Строим точку $P \equiv b \times c$ (осн. постр. 6 § 3);

2) На прямой c откладываем от точки P отрезок $PQ = l$ (элементарная задача 3).

Далее строим последовательно:

3) прямую $QM \parallel b$ (элементарная задача 5);

4) точку $A \equiv QM \times a$ (осн. постр. 6);

5) прямую $AN \parallel c$ (элементарная задача 5);

6) точку $B \equiv AN \times b$.

AB — искомый отрезок.

Доказательство. Из построения видно, что $A \in a$, $B \in b$ и $AB \parallel c$. Кроме того, $AB = PQ = l$, как противоположные стороны параллелограмма.

Исследование. Точка P существует, так как по условию прямая c пересекает прямую b. Поэтому построение 1) всегда возможно. Построение 2) всегда возможно и даёт две точки Q и Q' (рис. 23).

* Символ $A \in a$ означает, что точка A принадлежит прямой a.

Построение 3) всегда однозначно выполнимо для каждой из точек Q и Q'.

Возможны три случая:

α) QM (одновременно $Q'M'$) пересекает a (рис. 23);

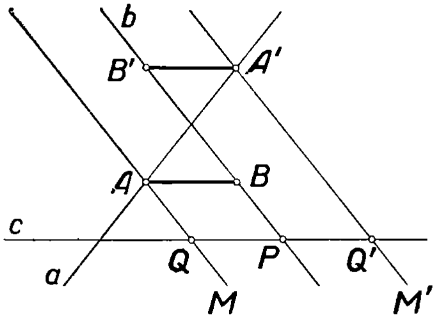

Рис. 23.

β) QM (одновременно $Q'M'$) параллельна a (рис. 24);

γ) QM или $Q'M'$ совпадает с a (рис. 25).

Случай α) имеет место, если b пересекает a. При этом построения 4)—6) однозначно выполнимы для каждой из точек Q и Q'. Получаем два решения задачи.

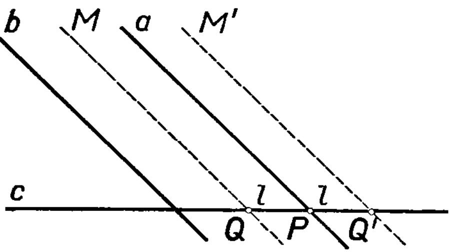

Рис. 24.

Случай β) имеет место, когда $a \parallel b$, причём прямые a и b отсекают на прямой c отрезок, не равный l. В этом случае построение 4) не выполнимо, мы не получим ни одного решения.

В случае γ) (рис. 25), т. е. когда $a \parallel b$ и отрезок, отсекаемый этими прямыми на прямой c, равен l, задача имеет бесконечное множество решений: искомый отрезок можно провести через любую точку прямой a.

Для полноты исследования надо ещё показать, что при всяком другом способе построения не могут возникнуть какие-либо новые решения. В случае пересечения прямых a и b это сводится к предложению: все отрезки, отсекаемые

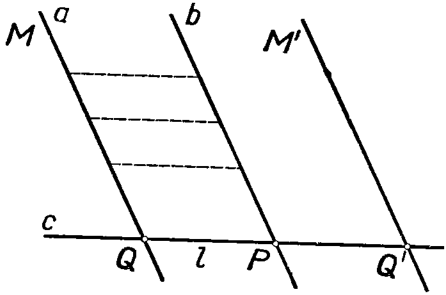

Рис. 25.

сторонами угла на параллельных прямых, различны по величине. Ясно, что в случае параллельности прямых a и b не могут возникнуть решения, отличные от полученных нами.

Задача 3. Построить треугольник, зная биссектрису, медиану и высоту, проведённые из одной его вершины.

Анализ. Пусть ABC (рис. 26) — искомый треугольник, $AH = h_A$ — его высота, $AM = m_A$ — медиана, $AD = b_A$ — биссектриса угла BAC. Представим себе окружность ω, описанную около треугольника ABC. Пусть O — её центр. Тогда прямая OM перпендикулярна хорде BC и поэтому делит пополам каждую из двух дуг окружности, стягиваемых этой хордой. Но биссектриса AD также делит пополам ту дугу окружности ω, на которую опирается угол BAC. Поэтому прямая OM и биссектриса AD встретятся в точке P описанной окружности. Заметим ещё, что перпендикуляр из O на AP проходит через середину S отрезка AP.

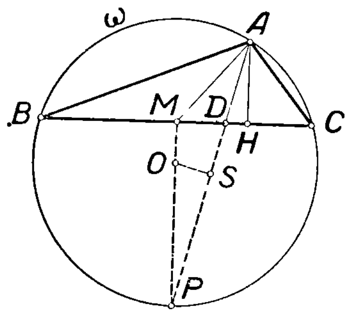

Рис. 26.

Построение. По гипотенузе b_A и катету h_A строим прямоугольный треугольник AHD. На луче HD находим точку M, проводя окружность (A, m_A) до пересечения с прямой DH. Находим точку P пересечения прямой AD с перпендикуляром к прямой DH в точке M. Строим центр O описанной окружности ω как пересечение прямой MP с перпендикуляром к отрезку AP, проведённым через его середину. Точки B и C образуются в пересечении прямой DH с окружностью $\omega(O, OA)$.

Доказательство. Отрезок AH служит высотой треугольника ABC, так как при точке H строился прямой угол. Точка M — середина отрезка BC, так как является основанием перпендикуляра, опущенного из центра окружности на её хорду BC. Так как точка P — середина дуги BPC, то вписанные углы BAP и CAP равны между собой, так что AD — биссектриса угла A.

Исследование. Необходимым условием разрешимости являются соотношения:

$$m_A \geqslant b_A \geqslant h_A,$$

так как в треугольнике либо биссектриса располагается между медианой и высотой, либо все эти линии совпадают (доказательство этого предложения можно найти в [7], задачи 9, 11). Если $m_A = b_A = h_A$, то задача состоит в построении равнобедренного треугольника по его высоте (которая одновременно служит его биссектрисой и медианой). Такая задача является неопределённой, причём построение отдельных её решений не представляет никакого труда. Обратимся к случаю $m_A > b_A > h_A$ и исследуем задачу по ходу приведённого выше построения. Треугольник ADH может быть построен и определяется условием однозначно. Окружность (A, m_A) пересечётся с лучом HD в точке M (так как $m_A > h_A$).

Точка P всегда существует и определяется однозначно, как пересечение перпендикуляра и наклонной к одной прямой. Прямая AP не перпендикулярна MP, так как она не параллельна DH; поэтому перпендикуляр к отрезку AP всегда встретится с MP, т. е. центр описанной окружности существует и определяется при данном способе построения однозначно. Прямая DH пересекается с окружностью ω в двух точках B и C, так как проходит через внутреннюю точку D этой окружности. Итак, указанный приём построения всегда приводит к решению.

Другой приём построения не может дать никакого нового решения: путём наложения можно доказать равенство двух треугольников, если медиана, биссектриса и высота одного треугольника, проведённые из одной его вершины, соответственно равны медиане, биссектрисе и высоте другого треугольника, также проведённым из одной вершины.

Задача 4. Построить треугольник по двум высотам h_B и h_C и медиане m_A.

Анализ. Пусть ABC (рис. 27) — искомый треугольник, AD — его медиана m_A, $BL = h_B$, $CH = h_C$. Построение тре-

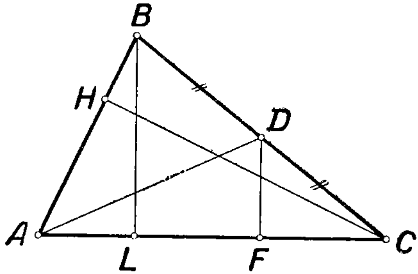

Рис. 27.

угольника ABC станет совсем простым, если удастся определить его угол BAC. Но $\measuredangle BAC = \measuredangle CAD + \measuredangle BAD$. Проведём $DF \perp AC$. Тогда станет ясно, что угол CAD легко определяется путём построения прямоугольного треугольника AFD, в котором известна гипотенуза $AD = m_A$ и катет $DF = \frac{1}{2} h_B$. Аналогично определяется и угол BAD.

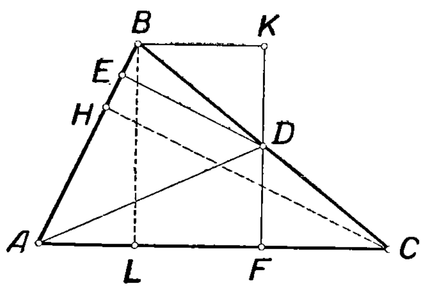

Рис. 28.

Построение (см. рис. 28). 1) Строим прямоугольный треугольник ADF по гипотенузе $AD = m_A$ и катету $DF = \frac{1}{2} h_B$. 2) Строим прямоугольный треугольник ADE

так, чтобы точки $Ё$ и F располагались по разные стороны прямой AD и чтобы $DE = \frac{1}{2} h_C$. 3) На луче FD откладываем отрезок $FK = h_B$. 4) Через точку K проводим прямую, параллельную AF, и отмечаем точку B её встречи с лучом AE. 5) Строим прямую BD. 6) Отмечаем точку C встречи прямых BD и AF. Треугольник ABC искомый.

Доказательство. Из равенства треугольников DBK и CDF следует, что $BD = DC$, т. е. AD — медиана. $AD = m_A$ по построению. Опустим из B перпендикуляр BL на AF. Тогда $BL = KF = h_B$. Пусть $CH \perp AB$. В треугольнике CHB отрезок DE служит средней линией. Поэтому $CH = 2DE = h_C$, так как $DE = \frac{1}{2} h_C$ по построению.

Исследование. Первый шаг вышеприведённого построения возможен и однозначно выполним, если $m_A > \frac{1}{2} h_B$, второй — если $m_A > \frac{1}{2} h_C$. Шаги 3, 4, 5 и 6 всегда возможны. Таким образом, приведённый способ построения даёт единственное решение, если одновременно $h_B < 2m_A$ и $h_C < 2m_A$. Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то решений нет. Невозможность получения иных решений другим способом следует из того, что при условии $m'_{A'} = m_A$, $h'_{B'} = h_B$, $h'_{C'} = h_C$ два треугольника $A'B'C'$ и ABC оказываются равными.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Перечислите общие аксиомы конструктивной геометрии.
2 Назовите известные вам инструменты геометрических построений.
3. Перечислите основные геометрические построения, выполнимые при наличии одного из следующих инструментов: линейки, циркуля, двусторонней линейки, прямого угла.
4. Что называется решением геометрической задачи на построение?
5. Что значит решить геометрическую задачу на построение?
6. Изложите полное решение элементарных задач 5, 6, 7, 11, 12 (см. § 5).
7. Из каких этапов состоит полная схема решения геометрической задачи на построение?
8. Какова цель анализа геометрической задачи на построение и как он проводится?
9. В чём заключаются второй и третий этапы решения геометрической задачи на построение?
10. Какова цель исследования решения геометрической задачи на построение? Каков основной практический приём исследования?

ЗАДАЧИ

1. Построить треугольник по двум сторонам и углу против одной из них.

2. Построить общую касательную к двум данным окружностям.

3. Построить треугольник по стороне, противолежащему ей углу и сумме двух других сторон.

4. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и разности катетов.

5. Построить треугольник по углу и двум высотам, опущенным на стороны этого угла.

6. Через данную точку провести прямую так, чтобы две данные равные окружности отсекали от неё равные отрезки.

7. Построить квадрат по сумме стороны с диагональю.

8. Построить ромб по стороне и сумме диагоналей.

9. Даны две прямые и точка. Провести через эту точку такую секущую, чтобы часть её, заключённая между данными прямыми, делилась данной точкой пополам.

10. Построить треугольник по высоте, периметру и углу при основании.

11. Построить треугольник по двум углам и периметру.

12. Построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и сумме (или разности) основания и высоты.

13. Провести в данном треугольнике прямую, параллельную основанию, так, чтобы отрезок этой прямой, заключённой между боковыми сторонами треугольника, был равен сумме отсекаемых прямой отрезков боковых сторон, считая от основания.

14. Построить параллелограмм по стороне, разности (или сумме) диагоналей и углу между ними.

15. Дана окружность и на ней три точки, в которых пересекаются с окружностью при продолжении высота, биссектриса и медиана, исходящие из одной вершины вписанного треугольника. Построить этот треугольник.

16. Построить квадрат, три вершины которого лежали бы на трёх данных параллельных прямых.

17. Через точку, данную вне окружности, провести секущую так, чтобы она делилась данной окружностью пополам.

18. Даны две концентрические окружности. Через данную точку на большей из них провести секущую так, чтобы хорда, отсекаемая на этой секущей большей окружностью, была в три раза больше хорды, отсекаемой на той же прямой меньшей окружностью.

19. Построить параллелограмм, зная середины трёх его сторон.

20. Построить треугольник по двум его высотам и медиане, проведённой из той же вершины, что и одна из высот.

Глава II

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

§ 1. Понятие о геометрическом месте точек

Геометрическая фигура может быть задана различными способами: как пересечение или соединение данных фигур, путём указания определяющего её свойства, путём указания свойства, которым обладает каждая её точка, и т. п. Так, например, один и тот же отрезок AB (рис. 29) можно задать: 1) как пересечение лучей AM и BN; 2) как диаметр данной окружности ω, перпендикулярный к данной прямой l; 3) как совокупность середин всех хорд окружности ω, параллельных прямой l, и другими способами.

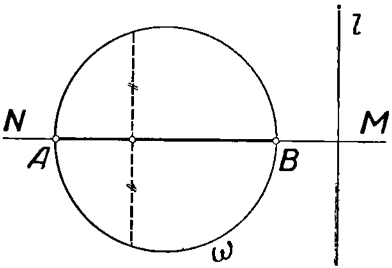

Рис. 29.

Если фигура задана путём указания свойства, которым обладают все точки этой фигуры и только они, то такую фигуру называют *геометрическим местом точек*, обладающих указанным свойством.

Таким образом, геометрическим местом точек плоскости, обладающих указанным свойством, называется фигура, состоящая из всех тех и только тех точек плоскости, которые обладают этим свойством.

В нашем примере отрезок AB является геометрическим местом середин хорд окружности ω, параллельных прямой l.

Свойство, при помощи которого характеризуется то или иное геометрическое место точек, называется *характеристическим* свойством точек этого геометрического места.

Часто новые фигуры вводятся в геометрию именно как геометрические места, например окружность — в школьном курсе геометрии, эллипс, гипербола и парабола — в курсе аналитической геометрии. При составлении уравнений линий в аналитической геометрии их рассматривают именно как геометрические места точек.

Геометрическое место точек может быть не только линией или совокупностью нескольких линий, но также конечной совокупностью точек, областью плоскости и др. Может оказаться также, что геометрическое место точек, обладающих некоторым указанным свойством, вовсе не существует.

Чтобы доказать, что фигура Ф есть геометрическое место точек, обладающих указанным свойством, надо доказать следующие два взаимнообратные предложения: 1) каждая точка фигуры Ф обладает этим свойством; 2) каждая точка, обладающая указанным свойством, принадлежит фигуре Ф.

В дальнейшем, ради краткости, вместо „геометрическое место точек“, будем писать ГМТ.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Пусть даны две параллельные прямые a и b и перпендикулярная к ним прямая c (рис. 30). Найдём ГМТ плоскости, равноудалённых от этих трёх прямых. Пусть $A \equiv a \times c$, $B \equiv b \times c$. Проведя через середину отрезка AB прямую l, параллельную прямым a и b, и взяв на этой прямой точки P и Q, расположенные по разные стороны от прямой c на расстоянии $\frac{1}{2}AB$ от неё, легко заметить, что

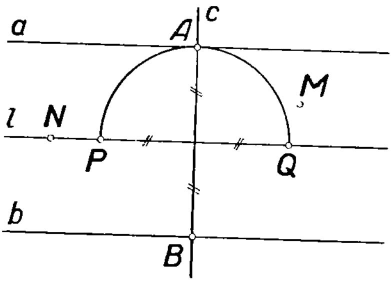

Рис. 30.

каждая из этих точек P и Q одинаково удалена от всех трёх данных прямых a, b и c. Других точек плоскости, обладающих таким свойством, не существует: если точка M не принадлежит прямой l, то она неодинаково удалена от прямых a и b; если же точка N расположена на прямой l и не совпадает ни с P, ни с Q, то нетрудно понять, что она неодинаково удалена от прямых a и c. Таким образом, пара точек P и Q является геометрическим местом точек, расстояния которых от прямых a, b и c одинаковы.

Пример 2. Рассмотрим ГМТ плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных параллельных прямых равна данному отрезку.

Пусть a и b — данные параллельные прямые, h — расстояние между ними, s — данный отрезок. Заметим прежде всего, что для каждой точки M, лежащей на любой из данных прямых, а также для всякой точки N, лежащей в полосе между этими прямыми (рис. 31), сумма расстояний от заданных прямых равна h. Для остальных же точек плоскости (например, для точки P) эта сумма больше h. Отсюда ясно:

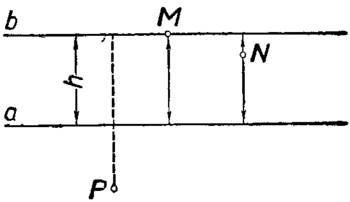

Рис. 31.

1) Если $s < h$, то искомое ГМТ не существует.

2) Если $s = h$, то искомое ГМТ представляет совокупность всех точек, расположенных на заданных прямых и в полосе между ними.

3) Остаётся рассмотреть случай $s > h$.

Пусть a' и b' — пара прямых, параллельных данным прямым a и b, причём каждая из прямых a' и b' расположена вне полосы, ограниченной прямыми a и b, и отстоит от одной из этих прямых на расстоянии $\frac{s-h}{2}$.

Докажем, что искомое ГМТ есть эта пара прямых.

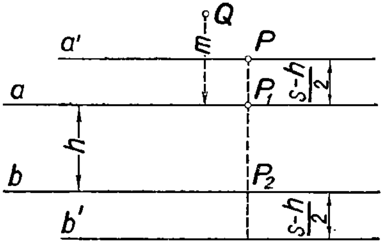

Рис. 32.

В самом деле (см. рисунок 32), пусть точка P принадлежит прямой a' или b'. Пусть для определенности $P \in a'$. Тогда сумма расстояний точки P от прямых a и b равна $PP_1 + PP_2 = \frac{s-h}{2} + \left(\frac{s-h}{2} + h\right) = s$. Пусть точка Q не принадлежит ни прямой a', ни прямой b'. Докажем, что сумма расстояний такой точки от прямых a и b не равна s. Если точка Q лежит в полосе между данными прямыми a и b или на одной из них, то сумма её расстояний от данных прямых равна h и, следовательно, меньше s. Пусть теперь точка Q — вне этой полосы и пусть для определенности она расположена с той стороны от полосы, где лежит прямая a'. Обозначим расстояние точки Q от прямой a через m, тогда $m \neq \frac{s-h}{2}$. Следовательно, сумма расстояний точки Q от данных прямых a и b равна $m+(m+h)=2m+h \neq 2\,\frac{s-h}{2}+h$, т. е. эта сумма не равна s. Итак, доказано, что совокупность двух прямых a' и b' является искомым геометрическим местом точек.

Разнообразные примеры ГМТ возникают в связи с употреблением метода координат. Если на плоскости выбрана какая-либо система координат, то каждое уравнение между координатами точек определяет некоторую совокупность точек, а именно ГМТ, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Пример 3. Представим себе, что на плоскости выбрана некоторая прямоугольная система координат xOy. Рассмотрим ГМТ, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi y = 1.$$

Заменяя $\sin^2 \pi x$ через $1-\cos^2 \pi x$, приходим к более простому соотношению

$$\cos^2 \pi y = \cos^2 \pi x$$

или

$$\frac{1+\cos 2\pi y}{2} = \frac{1+\cos 2\pi x}{2},$$

т. е. $\cos 2\pi y = \cos 2\pi x$.

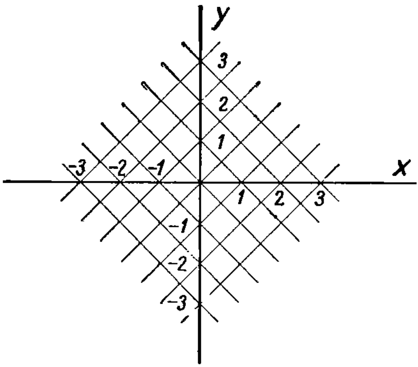

Рис. 33.

Последнее соотношение удовлетворяется при условии

$$2\pi y = 2\pi n \pm 2\pi x,$$

т. е. при условии $y = \pm x + n$, где n — любое целое число. Таким образом, ГМТ, координаты которых удовлетворяют уравнению $\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi y = 1$, представляют собой сеть всех прямых, имеющих угловой коэффициент 1 или -1 и пересекающих оси координат в точках с целочисленными координатами (рис. 33).

§ 2. Обзор простейших геометрических мест

Простейшие ГМТ на плоскости рассматриваются в школьном курсе геометрии. Перечислим важнейшие из них.

1. ГМТ (плоскости), находящихся на данном расстоянии r от некоторой данной точки O (этой плоскости), есть по определению окружность радиуса r с центром в точке O.

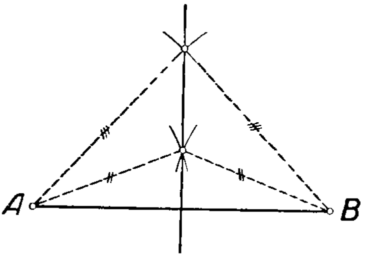

Рис. 34.

2. ГМТ (плоскости), равноудалённых от двух данных (в этой плоскости) точек, есть прямая, проходящая через середину отрезка, соединяющего данные точки, и перпендикулярная к этому отрезку (рис. 34).

Это ГМТ иногда называют *симметралью* или *медиатрисой* данных точек.

Построение этого ГМТ общеизвестно.

3. ГМТ (плоскости), находящихся на данном расстоянии h от данной (в этой плоскости) прямой, есть пара прямых, параллельных данной прямой.

Для построения этого ГМТ надо в любой точке A данной прямой a провести к ней перпендикуляр p, отложить на нём по обе стороны от этой прямой данный отрезок h и провести через концы отложенных отрезков прямые l_1 и l_2, параллельные данной прямой a (рис. 35).

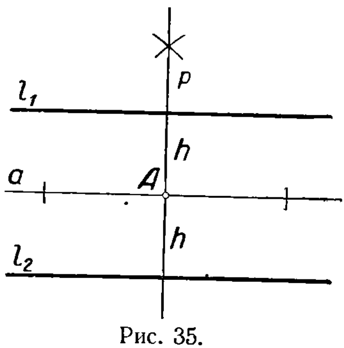

Рис. 35.

4. ГМТ (плоскости), равноудалённых от двух данных параллельных прямых (этой плоскости), есть прямая, параллельная данным прямым.

Для построения этого ГМТ проводят какую-либо прямую c, пересекающую данные прямые a и b, делят отрезок этой секущей, заключённый между данными прямыми, пополам и проводят искомую прямую через середину этого отрезка параллельно данным прямым (рис. 36). Полученную прямую называют иногда *средней линией* данных параллельных прямых.

5. ГМТ (плоскости), равноудалённых от двух данных пересекающихся прямых (этой плоскости), представляет собой две взаимно перпендикулярные прямые, являющиеся биссектрисами углов, образованных данными прямыми (рис. 37).

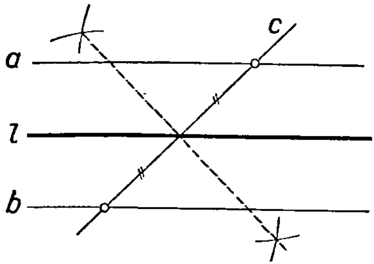

Рис. 36.

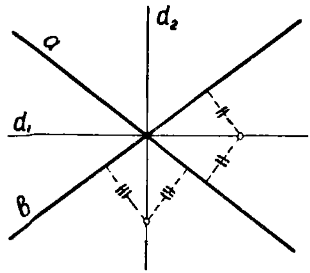

Рис. 37.

Построение этого ГМТ сводится к элементарной задаче о делении данного угла пополам (гл. 1, § 5, задача 2). На рисунке 37 прямые d_1 и d_2 образуют ГМТ, равноудалённых от прямых a и b.

§ 3. Разыскание геометрических мест

Часто встречается задача: найти ГМТ, обладающих таким-то свойством. Постановка этой задачи предполагает, что выделена некоторая совокупность „простейших“ или „элементарных“ фигур. Задача состоит в том, чтобы указать, какая из фигур этой совокупности представляет собой искомое геометрическое место.

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо располагать перечнем всех фигур, которые считаются уже известными, простейшими, элементарными. Этот перечень является условным. В условиях элементарной планиметрии естественно отнести к числу элементарных фигур прежде всего следующие фигуры: всю плоскость, точки, прямые, отрезки прямых, лучи, окружности, дуги окружностей.

Если какая-либо фигура является пересечением, соединением или разностью двух элементарных фигур, то мы также отнесём её к числу элементарных фигур*. Если какая-либо элементарная

* При таком условии из приведённого списка элементарных фигур можно, строго говоря, исключить прямую (как сумму лучей) и окружность (как соединение дуг).

фигура разбивает плоскость на конечное число частей (областей *), то каждую такую часть мы также считаем элементарной фигурой.

Этот перечень определяет класс элементарных фигур. К числу таких фигур относится, в частности, любая конечная совокупность точек, всякий многоугольник, круг, круговой сегмент, сектор, полоса между двумя параллельными прямыми, полуплоскость.

Точный смысл задачи о нахождении ГМТ, обладающих данным свойством, состоит в том, чтобы указать, какую именно элементарную фигуру представляет собой искомое геометрическое место точек.

Остановимся на методике решения этой задачи.

Решение задачи на нахождение ГМТ складывается обычно из *анализа*, *доказательства* и *исследования*, подобно тому, как это делается при решении геометрической задачи на построение.

Не следует, однако, смешивать нахождение ГМТ с его построением: первое само по себе не предполагает второго; иногда найденное ГМТ и не может быть построено с данным набором инструментов.

Цель анализа — прийти к некоторой гипотезе относительно того, чем является искомое ГМТ.

Анализ обычно начинают с того, что на чертеже изображают данную фигуру и рассматривают какую-либо точку, принадлежащую по предположению искомому ГМТ. Устанавливают некоторые связи этой точки с данными элементами, вытекающие из определения ГМТ и помогающие определить его форму и положение. Иногда анализу способствует рассмотрение какого-либо частного случая или же непосредственное построение нескольких точек, принадлежащих искомому геометрическому месту. В результате анализа мы приходим лишь к предположительному решению задачи, которое требует ещё обоснования, т. е. доказательства.

В ходе доказательства устанавливается справедливость двух взаимно обратных предложений: 1) что всякая точка найденной (в анализе) фигуры обладает характеристическим свойством точек искомого ГМТ и 2) что каждая точка, обладающая указанным характеристическим свойством, принадлежит найденной при анализе фигуре. Полезно иметь в виду, что доказательство предложения 2) может быть заменено доказательством следующего предложения 2′): если какая-либо точка не принадлежит найденной фигуре, то она не обладает указанным характеристическим свойством.

---

* О понятии области см., например, [20], ч. 1, стр. 16.

Заметим, что одно из этих предложений часто устанавливается уже в ходе анализа.

Исследование заключается в рассмотрении различных случаев, которые могут представиться при решении задачи в зависимости от того или иного выбора данных.

Поясним сказанное примерами.

Пример 1. Найти ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом.

Анализ. Пусть AB (рис. 38) — данный отрезок, α — данный угол.

Если M — точка искомого ГМТ, то $\measuredangle AMB = \alpha$ по условию. В связи с этим условием естественно вспомнить теорему о равенстве вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу (см. [9], гл. 2, разд. V, п. 125).

Проведём окружность через три точки A, M и B, которые не лежат на одной прямой, если $0° < \alpha < 180°$. Тогда для всякой точки M' дуги AMB этой окружности (кроме точек A и B) $\measuredangle AM'B$ также равен α, т. е. каждая точка этой дуги также принадлежит искомому ГМТ.

Кроме того, очевидно, все точки (кроме A и B) дуги ANB, симметричной с дугой AMB относительно прямой AB, обладают тем же свойством и поэтому принадлежат тому же ГМТ.

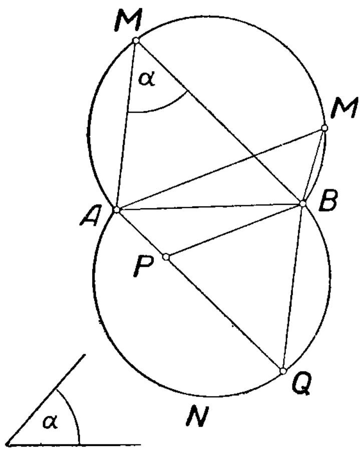

Рис. 38.

Доказательство. Чтобы доказать, что фигура Ф, составленная из двух симметричных дуг окружностей, проходящих через точки A и B, действительно представляет искомое ГМТ, осталось рассмотреть точки, не принадлежащие этой фигуре. Если точка P лежит в области, ограниченной фигурой Ф, то, проведя луч AP (или BP) до встречи с фигурой Ф в точке Q, заметим, что $\measuredangle APB > \measuredangle AQB = \alpha$. Если же избрать точку P вне указанной области, то получим противоположный результат: $\measuredangle APB < \alpha$.

Итак, ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом, представляет собой соединение двух дуг окружностей, проходящих через концы данного отрезка и расположенных симметрично по отношению к этому отрезку. Точки A и B не следует причислять к этому геометрическому месту, так как при совпадении точки M с каким-либо концом отрезка AB угол AMB становится неопределённым.

Исследование. Если угол α прямой, то фигура Ф обращается в окружность с диаметром AB (без концов этого диаметра). Если угол α равен нулю, то искомым ГМТ является разность между прямой AB и отрезком AB. Если угол α равен 180°, то искомое ГМТ — интервал AB.

Построение фигуры Ф по данному отрезку AB и углу α изложено, например, в [9], гл. 2, п. 132.

Пример 2. Найти геометрическое место середин хорд, отсекаемых данной окружностью на прямых, проходящих через данную точку.

Пусть ω — данная окружность, O — её центр, A — данная точка (рис. 39).

Пусть P — середина какой-либо из рассматриваемых хорд, именно хорды MN.

Соединим точки P и O. Тогда $PO \perp MN$. Таким образом, отрезок OA виден из точки P под прямым углом. Значит, точка P принадлежит окружности, построенной на отрезке OA как на диаметре.

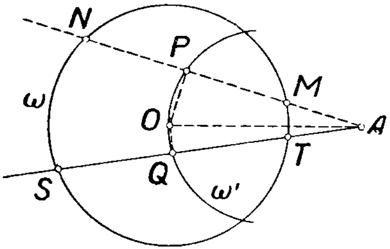

Рис. 39.

Кроме того, точка P должна лежать внутри данной окружности. Мы приходим, таким образом, к следующему предположению: искомым геометрическим местом точек является расположенная внутри данной окружности ω часть окружности ω', построенной на OA как на диаметре.

Для доказательства верности нашего предположения нужно показать, во-первых, что середина каждой из рассматриваемых хорд принадлежит указанной фигуре, во-вторых, что каждая точка Q, принадлежащая указанной части окружности ω', является серединой одной из рассматриваемых хорд. Первое из этих предложений было уже доказано при анализе. Для доказательства второго предложения проведём через Q и A прямую (рис. 39). Она пересечёт окружность ω в двух точках, так как Q внутри окружности. Обозначим эти точки через S и T. $\measuredangle OQA = 90°$, как вписанный, опирающийся на диаметр, т. е. $OQ \perp AQ$, так что Q — середина хорды ST в силу теоремы: радиус, перпендикулярный к хорде, делит её пополам.

Перейдём к исследованию. Если точка A вне окружности ω, то рассматриваемое геометрическое место — дуга окружности, имеющая концы на данной окружности и расположенная внутри данной окружности. Если же A внутри или на данной окружности, но не совпадает с её центром, то искомое ГМТ — окружность с диаметром OA. Если A совпадает с центром данной окружности, то искомое ГМТ — сама точка A.

Пример 3. Найти ГМТ, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная.

Пусть $AB = a$. Ищем геометрическое место таких точек M, для которых $AM^2 - BM^2 = c^2$, где c — данный отрезок.

Найдём сначала точки прямой AB, обладающие данным свойством. Выберем на прямой AB положительное направление от A к B. После этого припишем каждому отрезку этой прямой определённый знак, как это обычно делается. Тогда при любом положении точки M на прямой AB имеет место соотношение

$$\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB}\,*.$$

По условию

$$\overline{AM}^2 - \overline{MB}^2 = c^2,$$

т. е.

$$\overline{AM}^2 - (a - \overline{AM})^2 = c^2,$$

$$\overline{AM} = \frac{a^2 + c^2}{2a}. \qquad (\alpha)$$

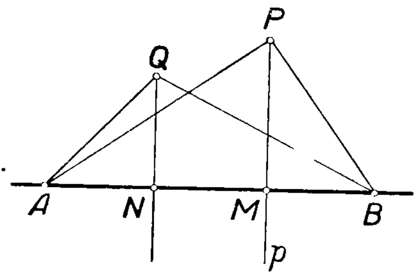

Рис. 40.

Таким образом, на прямой AB существует, и притом только одна, точка M, принадлежащая искомому ГМТ, т. е. такая, что $AM^2 - BM^2 = c^2$.

Положение этой точки определяется формулой (α).

Попытаемся найти другие точки, принадлежащие искомому ГМТ. Замечаем, что всякая точка P (рис. 40) на перпендикуляре p к AB, проходящем через точку M, также обладает указанным свойством. Действительно, $AP^2 - BP^2 =$

* Теорема Шаля.

$=(AM^2+MP^2)-(BM^2+MP^2)=AM^2-BM^2=c^2$. Так как при дальнейшем рассмотрении нам не удаётся обнаружить других точек, обладающих требуемым свойством, то приходим к предположению: искомым ГМТ является прямая p, перпендикулярная прямой AB и проходящая через найденную точку M.

Для доказательства справедливости высказанного предположения необходимо установить: 1) что всякая точка P прямой p обладает тем свойством, что $AP^2-BP^2=c^2$; это уже установлено в ходе анализа; 2) что точка, не принадлежащая прямой p, не обладает указанным свойством, т. е. для такой точки Q будет $AQ^2-BQ^2 \neq c^2$.

Проведём через точку Q (рис. 40) прямую QN, перпендикулярную к AB. Тогда $AQ^2-BQ^2=(AN^2+NQ^2)-(BN^2+NQ^2)=AN^2-BN^2$.

Так как точка Q не принадлежит прямой p, то точка N отлична от точки M. Но мы уже отметили, что точка M является единственной точкой прямой AB, принадлежащей искомому ГМТ. Следовательно, точка N, также расположенная на прямой AB, не принадлежит этому ГМТ. Поэтому $AN^2-BN^2 \neq c^2$, а значит, $AQ^2-BQ^2 \neq c^2$.

Пример 4. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Найти ГМТ, для которых сумма расстояний от прямых AB, BC, CD и AD равна данному отрезку s.

Для каждой точки, лежащей внутри квадрата $ABCD$ или на его стороне, сумма расстояний от прямых AB, BC, CD и AD, очевидно, равна $2a$. Нетрудно проверить, что для всякой точки, расположенной вне квадрата $ABCD$, сумма расстояний от тех же прямых заведомо больше $2a$.

Отсюда следует: 1) если $s=2a$, то искомое ГМТ состоит из всех внутренних точек квадрата и точек его сторон; 2) если $s<2a$, то искомое ГМТ не существует: на плоскости нет ни одной точки, сумма расстояний которой от прямых AB, BC, CD и AD была бы меньше $2a$.

Остаётся рассмотреть случай $s>2a$. Пусть $s=2a+2h$.

Для точки M, лежащей в пределах полосы, образуемой прямыми AB и CD, как видно из рисунка 41, сумма расстояний от прямых AB, BC, CD и AD будет $2a+2d$, где d — расстояние точки M от ближайшей к ней из сторон AD и BC. Поэтому искомому геометрическому месту принадлежат те и только те из таких точек M, для которых $d=h$, т. е. точки отрезков A_1D_1 и B_1C_1, отсекающих на продолжениях сторон AB и DC отрезки, равные h. Аналогичное положение имеет место в пределах полосы, образуемой прямыми AD и BC: рассматривая эту область, мы получим отрезки A_2B_2 и C_2D_2, изображённые на рисунке 41.

Остаётся найти точки искомого геометрического места, расположенные внутри углов A_1AA_2, B_1BB_2, C_1CC_2 и D_1DD_2. Для примера рассмотрим угол A_1AA_2. Пусть P — какая-нибудь точка внутри этого угла, PP_1 и PP_2 — её расстояния от прямых AD и AB. Проведём через эту точку прямую QR, образующую с прямой AB (следовательно, и с прямой AD) угол в 45°. Тогда

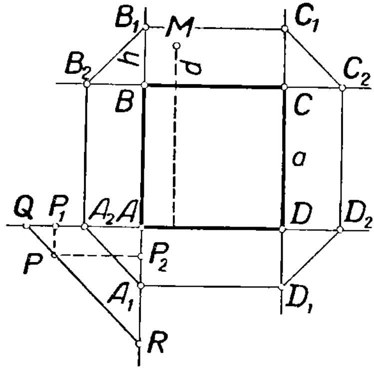

Рис. 41.

$$PP_1+PP_2=$$
$$=P_2A+RP_2=AR,$$

так что сумма расстояний точки P от четырёх данных прямых будет составлять $2a+2AR$. Согласно принятым обозначениям, точка P принадлежит искомому геометрическому месту в том и только в том случае, если

$$2a+2AR=2a+2h, \text{ т. е. } AR=h.$$

Таким образом, внутри угла A_1AA_2 искомому ГМТ принадлежат точки отрезка A_1A_2 и только они, а всё искомое ГМТ представляет восьмиугольник $A_1A_2B_2B_1C_1C_2D_2D_1$.

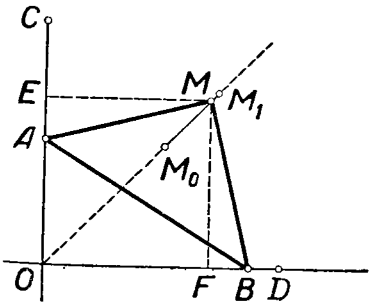

Рис. 42.

Интересные примеры ГМТ связаны с рассмотрением траекторий движущихся точек.

Пример 5. Равнобедренный прямоугольный треугольник AMB (рис. 42) перемещается по плоскости так, что его вершины A и B скользят по сторонам прямого угла COD. $CO=OD=AB$; $AM=a$. Какую траекторию опишет точка M, когда точка A опишет отрезок CO?

Пусть M_0 — начальное положение вершины M, т. е. в момент, когда A находится в C (рис. 43). Понятно, что M_0 лежит на биссектрисе угла COD.

В том положении треугольника AMB, когда $OA = OB$ (рис. 44), его вершина M также располагается на биссектрисе угла COD в некотором положении M_1.

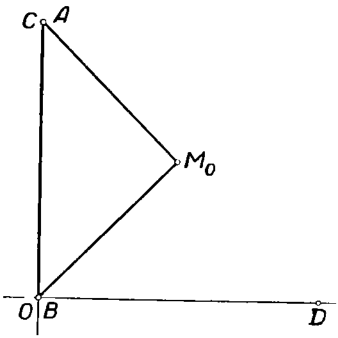

Рис. 43.

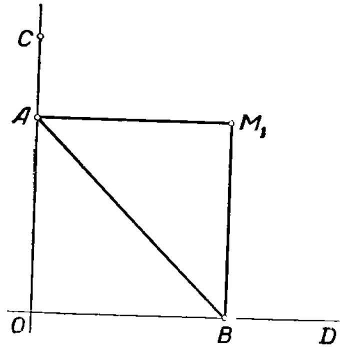

Рис. 44.

Пусть теперь треугольник AMB занимает произвольное из допустимых его положений (рис. 42).

Опустим из M перпендикуляры ME и MF на OC и OD (рис. 42). Тогда $\measuredangle AME = \measuredangle BMF$, как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Кроме того, $AM = BM$ по условию. Отсюда следует, что $\triangle AME = \triangle BMF$, и поэтому $ME = MF$, так что точка M в произвольном своём положении лежит также на биссектрисе угла COD.

Нетрудно показать, что $OM_0 \leqslant OM \leqslant OM_1$. Действительно:

$$MF \leqslant MB = a, \quad OM = MF\sqrt{2} \leqslant a\sqrt{2} = OM_1,$$

так что

$$OM \leqslant OM_1.$$

И с другой стороны: при любом положении треугольника AMB (см. рис. 42) $\measuredangle MOA = 45°$, а $\measuredangle MAO \geqslant \measuredangle MAB = 45°$, так что $\measuredangle MOA \leqslant \measuredangle MAO$, откуда следует, что $AM \leqslant OM$, т. е. $OM \geqslant a$ в то время как $OM_0 = a$.

Итак, доказано, что при любом положении треугольника AMB вершина его M находится на отрезке M_0M_1.

Обратно: если M' — произвольная точка отрезка M_0M_1, то существует такое положение $\triangle AMB$, при котором вершина M совпадает с точкой M'. Это можно доказать путём построения треугольника AMB в соответствующем положении. Это ясно также и из механических соображений: точка M, перемещаясь по отрезку M_0M_1, не может перейти из положения M_0 в положение M_1, не пройдя через каждое промежуточное положение M'.

Таким образом, отрезок M_0M_1 есть геометрическое место всевозможных положений вершины M подвижного треугольника AMB.

Интересно заметить, что при перемещении точки A из положения C в положение O точка M описывает отрезок M_0M_1 дважды.

§ 4. Окружность Аполлония

Рассмотрим следующую задачу: найти ГМТ плоскости, для которых отношение расстояний от двух заданных в этой плоскости точек A и B равно данному положительному числу λ $(\lambda \neq 1)$.

На прямой AB существуют две точки, принадлежащие искомому ГМТ: точка M, делящая отрезок AB в отношении λ внутренним образом (рис. 45), и точка N, делящая отрезок AB в том же отношении внешним образом, так что

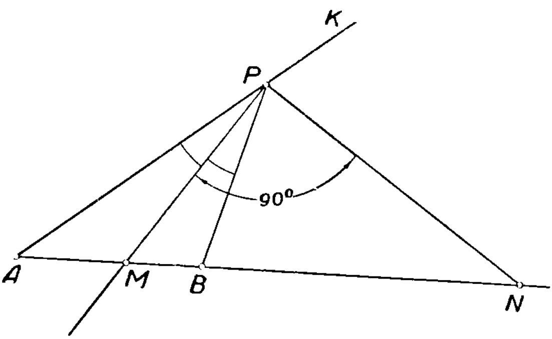

Рис. 45.

$$AM : BM = \lambda. \tag{1}$$

$$AN : BN = \lambda \tag{2}$$

Пусть теперь P — произвольная точка искомого ГМТ. Тогда

$$AP : BP = \lambda. \tag{3}$$

Соединим P с A, B, M и N. Из соотношений (1) и (3) следует, что $AM : BM = AP : BP$. Значит, отрезок PM, исходящий из вершины P, делит сторону AB треугольника APB внутренним образом на части, пропорциональные боковым сторонам AP и BP. Отсюда нетрудно заключить, что PM — биссектриса угла APB.

Аналогично из соотношений (2) и (3) вытекает, что $AN : BN = AP : BP$, откуда следует, что PN — биссектриса угла KPB (внешний угол треугольника APB при вершине P). Но биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны; поэтому $\measuredangle MPN = 90°$.

Итак, из произвольной точки P (отличной от M и N) искомого ГМТ отрезок MN виден под прямым углом. Следовательно, каждая точка, обладающая указанным свойством, расположена на окружности ω, диаметром которой является отрезок MN.

Докажем теперь обратное предложение: каждая точка Q этой окружности ω обладает тем свойством, что $AQ : BQ = \lambda$.

Если точка Q совпадает с точкой M или с точкой N, то предложение справедливо. Пусть Q отлична от M и от N.

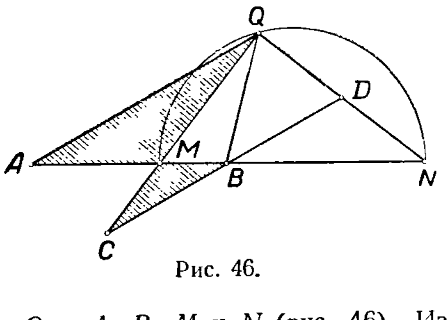

Рис. 46.

Соединим Q с A, B, M и N (рис. 46). Из двух точек A и B одна расположена на отрезке MN, другая вне его. Положим для определённости, что B — внутренняя точка отрезка MN. Проведём через B прямую, параллельную AQ, и отметим точки C и D пересечения её с прямыми QM и QN. Так как $\triangle BMC \backsim \triangle AMQ$, то $BC : AQ = BM : AM$ или $BC : AQ = 1 : \lambda$. Так как $\triangle BDN \backsim \triangle AQN$, то $BD : AQ = BN : AN$, т. е. $BD : AQ = 1 : \lambda$. Значит, $BC = BD$.

Иными словами, в треугольнике CDQ отрезок QB является медианой стороны CD. Но треугольник CDQ прямоугольный (ибо $\measuredangle CQD = \measuredangle MQN = 90°$, как вписанный, опирающийся на диаметр). Медиана же, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы, т. е. $QB = BC$. Но раньше было показано, что $BC : AQ = 1 : \lambda$. Следовательно, $AQ : BQ = \lambda$, что требовалось доказать.

Итак, геометрическим местом точек плоскости, расстояния которых от двух данных точек A и B находятся в данном отношении λ, отличном от нуля и единицы, является окружность, концами одного из диаметров которой служат точки, делящие отрезок AB внутренним и внешним образом в данном отношении. Эта окружность называется *окружностью Аполлония*.

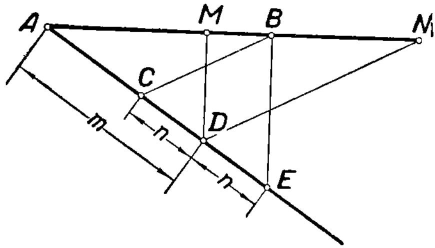

Рис. 47.

Если число λ задано в виде отношения двух отрезков m и n, то окружность Аполлония легко может быть построена с помощью циркуля и линейки. Для этого достаточно, очевидно, построить точки M и N, делящие отрезок AB в данном отношении $m : n$ соответственно внутренним и внешним образом. Способ построения ясен из рисунка 47, где $DN \parallel BC$ и $DM \parallel BE$, так что

$$AM : BM = AD : DE = m : n \text{ и } AN : BN = AD : CD = m : n.$$

Мы предполагали, что $\lambda > 0$ и $\lambda \neq 1$. Если $\lambda = 0$, то искомое ГМТ состоит из единственной точки A. Если $\lambda = 1$, то искомое ГМТ — симметраль точек A и B.

§ 5. Примеры разыскания геометрических мест методами аналитической геометрии

В аналитической геометрии на плоскости линия определяется, как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному алгебраическому уравнению вида $f(x, y) = 0$. Задача разыскания ГМТ ставится здесь именно в том смысле, что ищется соответствующее уравнение, т. е. уравнение, которому удовлетворяют координаты каждой точки, обладающей указанным характеристическим свойством, и только они. Конечно, вид этого уравнения существенно связан с тем, как выбрана координатная система. Целесообразный выбор системы координат подсказывается конкретными условиями той или иной задачи. Иногда уравнение позволяет установить, какую именно элементарную фигуру представляет искомое геометрическое место точек.

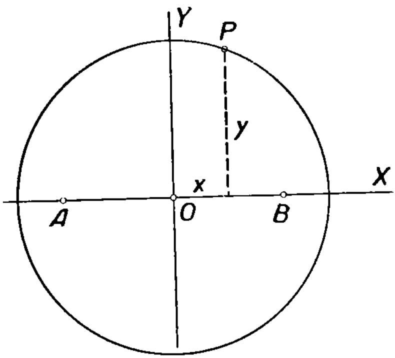

Рис. 48.

Поясним сказанное некоторыми примерами.

Пример 1. Найти ГМТ, для которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек плоскости равна квадрату данного отрезка.

Пусть A и B — две данные точки. Ищется геометрическое место точек, таких, что $AP^2+BP^2=a^2$, где a — данный отрезок.

Примем прямую AB за ось абсцисс прямоугольной системы координат, а за начало O системы координат возьмём середину отрезка AB. Пусть P (рис. 48) — произвольная точка искомого ГМТ, x, y — её координаты. Если обозначить AB через l, то при нашем выборе системы координат $A\left(-\frac{l}{2};\ 0\right)$ и $B\left(\frac{l}{2};\ 0\right)$. По известной формуле аналитической геометрии

$$AP^2=\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+y^2, \quad BP^2=\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+y^2,$$

и поэтому искомое ГМТ состоит из таких точек плоскости, для которых $\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+y^2+\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+y^2=a^2$ или $x^2+y^2=\frac{2a^2-l^2}{4}$.

Из полученного уравнения видно, что точки, обладающие указанным характеристическим свойством, существуют, если $2a^2-l^2\geqslant 0$, т. е. $a\sqrt{2}\geqslant l$.

Если $a\sqrt{2} > l$, то эти точки образуют окружность с центром в точке O.

Для построения этой окружности достаточно построить какую-либо её точку. Эту точку можно получить в пересечении окружностей $\omega_1\left(A, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\omega_2\left(B, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ (которые непременно пересекутся, так как сумма их радиусов $a\sqrt{2}$ больше расстояния между их центрами l). При $a = l$ искомая окружность пройдёт через точки A и B.

При $a\sqrt{2} = l$ существует только одна такая точка, именно точка O.

Пример 2. Дана окружность ω и точка A (рис. 49). Найти геометрическое место середин отрезков, соединяющих точку A с точками окружности ω. Пусть C — центр

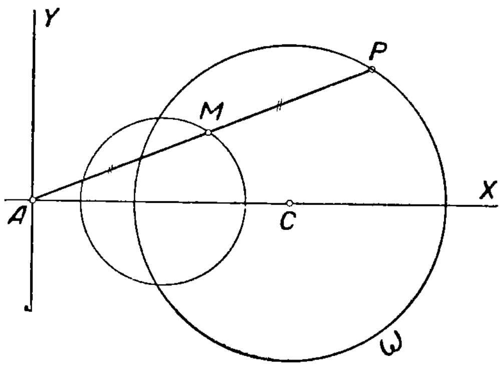

Рис. 49.

данной окружности, $AC = a$. Примем точку A за начало прямоугольной системы координат, а прямую AC — за ось абсцисс. Тогда, если считать направление от A к C за положительное, точка C получает координаты $(a;\ 0)$ и данная окружность получает уравнение: $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, где r — радиус. Пусть $P(x,\ y)$ — произвольная точка окружности ω, M — соответствующая ей точка искомого ГМТ, ξ и η — координаты точки M. Тогда $\xi = \frac{x}{2}$, $\eta = \frac{y}{2}$, так что $x = 2\xi$, $y = 2\eta$, и интересующее нас ГМТ представляется уравнением:

$$(2\xi - a)^2 + 4\eta^2 = r^2$$

или

$$\left(\xi-\frac{a}{2}\right)^2+\eta^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2.$$

Это — окружность с центром $\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$ и радиусом $\frac{r}{2}$.

§ 6. Решение задач на построение методом геометрических мест

Сущность метода геометрических мест заключается в следующем. Решение задачи на построение сводят к разысканию некоторой точки, подчинённой двум независимым условиям. Отбрасываем одно из этих условий и ищем ГМТ, удовлетворяющих второму условию. Пусть это будет фигура Φ_2. Отбрасываем затем второе условие и ищем ГМТ, удовлетворяющих первому условию. Пусть это будет фигура Φ_1. Ясно, что обоим условиям удовлетворяет каждая точка пересечения фигур Φ_1 и Φ_2, а всякая точка, не принадлежащая пересечению этих фигур, не удовлетворяет хотя бы одному из этих условий. Каждая точка фигуры $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ даёт возможность найти некоторое решение задачи.

Пример 1. Построить окружность, касательную к двум данным параллельным прямым a и b и проходящую через данную точку P.

Анализ. Обозначим расстояние между данными прямыми через d. Тогда радиус искомой окружности должен быть равен $\frac{d}{2}$. Задача сводится к построению центра окружности, который должен удовлетворять двум условиям: 1) он должен быть одинаково удалён от прямых a и b; 2) он должен отстоять от точки P на расстоянии $\frac{d}{2}$. Отсюда вытекает построение.

Построение. Из произвольной точки A прямой a опускаем перпендикуляр AB на прямую b (рис. 50). Строим середину C отрезка AB. Строим ГМТ, равноудалённых от прямых a и b; это будет прямая c, проходящая через точку C и параллельная прямым a и b. Строим затем ГМТ, удовлетворяющих условию 2). Это будет окружность $\omega\left(P;\ \frac{d}{2}\right)$. Отметим точку O_1 пересечения окружности ω с прямой c. Строим окружность $\omega_1(O_1,\ O_1P)$. Эта окружность искомая.

Доказательство. Окружность ω_1 касается прямых a и b, так как расстояния её центра O_1 от этих прямых одинаковы и равны $\frac{1}{2}d$. Эта окружность проходит через точку P по построению.

Исследование. Возможны три случая.

1. Точка P расположена между данными прямыми a и b. Указанный способ построения даёт два решения: $\omega_1(O_1, O_1P)$ и $\omega_2(O_2, O_2P)$. Других решений нет, ибо

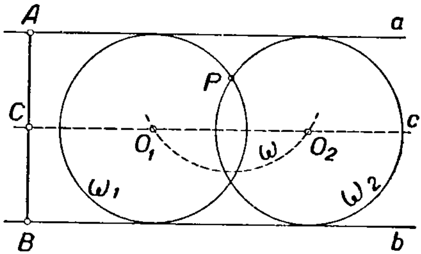

Рис. 50.

если бы существовали три окружности, удовлетворяющие условиям задачи, то их центры O_1, O_2 и O_3 должны были бы лежать на одной прямой c. С другой стороны, мы должны были бы иметь $O_1P = O_2P = O_3P = AC$, т. е. точки O_1, O_2 и O_3 должны были бы лежать на одной окружности (P, AC), так что возникает противоречие.

2. Точка P — на одной из прямых a или b. Задача имеет одно решение.

3. Точка P — вне полосы, ограниченной прямыми a и b. Задача не имеет решения.

Пример 2. На диаметре круглого биллиардного стола были расположены (по разные стороны от центра и на неравных от него расстояниях) два шара A и B. Шар B ударили так, что после одного отражения от борта стола он попал в шар A. Восстановить траекторию шара B (считая, что удар не был направлен по диаметру BA).

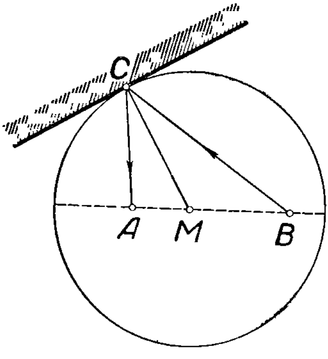

Рис. 51.

Пусть C (рис. 51) — точка, в которой шар ударился о борт стола, M — центр стола. Согласно закону отражения,

$$\angle ACM = \angle BCM,$$

так что CM — биссектриса угла ACB.

Таким образом, задача сводится к следующему геометрическому построению.

Построить треугольник, зная биссектрису b одного из углов и отрезки p и $q\,(p > q)$, на которые эта биссектриса делит противолежащую сторону.

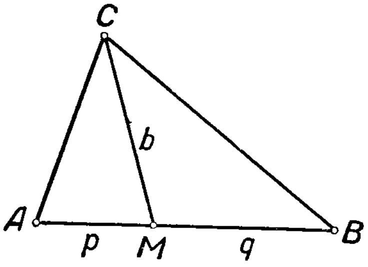

Рис. 52.

Анализ. Пусть $\triangle ABC$ искомый (рис. 52), CM — данная биссектриса, AM и BM — данные отрезки p и q. Вершины A и B искомого треугольника легко построить. Значит, задача сводится к построению вершины C. Точка C должна удовлетворять двум условиям: 1) она должна находиться на расстоянии b от точки M; 2) отношение расстояний этой точки от вершин A и B должно быть равно $p:q$, т. е. $CA:CB = p:q$.

Построение. На произвольной прямой (рис. 53) выбираем три точки A, M и B так, чтобы $AM = p$, $MB = q$ и

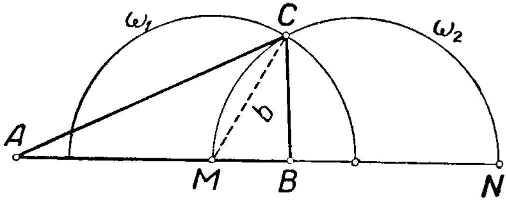

Рис. 53.

отрезки AM и BM не имели общих (внутренних) точек. Строим ГМТ, удовлетворяющих условию 1); это окружность $\omega_1\,(M, b)$. Строим ГМТ, удовлетворяющих условию 2); это некоторая определённая окружность (окружность Аполлония) ω_2.

Отмечаем какую-либо точку C пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Треугольник ABC искомый.

Доказательство очевидно из рассуждений, проведённых при анализе.

Исследование. Пусть MN — диаметр окружности ω_2. Задача имеет решение лишь тогда, когда $b < MN$. Но

$$MN = MB + BN; \quad \frac{BN}{p+q+BN} = \frac{q}{p}; \quad \frac{BN}{p+q} = \frac{q}{p-q};$$

$$BN = \frac{q(p+q)}{p-q}.$$

Следовательно,

$$MN = q \cdot \frac{p+q}{p-q} + q = q \cdot \frac{2p}{p-q}.$$

Таким образом, задача имеет решение, если $b < \frac{2pq}{p-q}$. В этом случае решение единственное, так как окружности ω_1 и ω_2 пересекаются при этом в двух точках C_1 и C_2, симметричных относительно прямой AB, и поэтому треугольники AC_1B и AC_2B равны. Если $b \geqslant \frac{2pq}{p-q}$, то задача не имеет решений.

Пример 3. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и радиусу вписанной окружности.

Анализ. Пусть ABC — искомый треугольник, A — данный его угол, r — заданный радиус вписанной окружности, $BC = a$ — заданное основание.

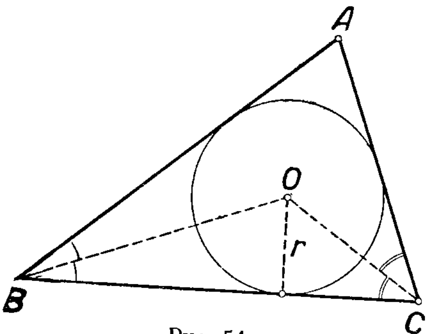

Рис. 54.

Рассмотрим центр O вписанной окружности. Точка O отстоит от BC на расстоянии r (первое свойство центра). Кроме этого (рис. 54), $\measuredangle BOC = 90° - \frac{B}{2} + 90° - \frac{C}{2} = 90° + \frac{180° - B - C}{2}$, так что $\measuredangle BOC = 90° + \frac{A}{2}$ (второе свойство центра).

ГМТ, обладающих первым свойством, представляет пару прямых, параллельных BC. ГМТ, обладающих вторым свойством $\left(\text{отрезок } BC \text{ виден из } O \text{ под углом } 90^\circ + \frac{A}{2}\right)$, представляет пару дуг сегментов, вмещающих угол $90^\circ + \frac{A}{2}$. Каждая точка пересечения этих двух геометрических мест может служить центром вписанной окружности.

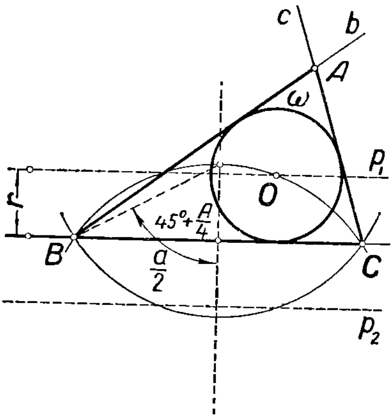

Рис. 55.

Построение. 1) На произвольной прямой откладываем отрезок $BC = a$ (рис. 55). Далее строим последовательно: 2) пару прямых p_1 и p_2, параллельных BC и отстоящих от BC на данном расстоянии r; 3) пару сегментов, вмещающих угол $90^\circ + \frac{A}{2}$; 4) точку O как одну из точек пересечения упомянутых геометрических мест; 5) окружность $\omega(O, r)$; 6) из точек B и C проводим лучи b и c, касательные к окружности ω; 7) отмечаем точку A пересечения этих лучей. Треугольник ABC — искомый.

Доказательство не представляет затруднений.

Исследование. Чтобы существовали точки пересечения упомянутых выше двух геометрических мест, необходимо и достаточно, чтобы стрела сегмента была не меньше отрезка r, т. е. чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{a}{2} \operatorname{ctg}\left(45^\circ + \frac{A}{4}\right) \geqslant r. \qquad (1)$$

Шаги 5, 6 и 7 всегда выполнимы. Последнее следует из того, что

$$\measuredangle(BC, b) + \measuredangle(CB, c) = 2(\measuredangle CBO + \measuredangle BCO) =$$
$$= 2(180^\circ - \measuredangle BOC) = 2\left[180^\circ - \left(90^\circ + \frac{A}{2}\right)\right] =$$
$$= 180^\circ - A < 180^\circ,$$

так что лучи b и c заведомо пересекаются. Не делая различия между четырьмя возможными одинаковыми решениями (в зависимости от выбора точки O), приходим к выводу, что при условии (1) задача имеет единственное решение, а если это условие не выполняется, то решения нет.

Пример 4. Построить треугольник по его острому углу при вершине, радиусу описанной окружности и сумме квадратов боковых сторон.

Анализ. Пусть ABC — искомый треугольник, $\omega(O, R)$ — описанная около него окружность, $\measuredangle A = \alpha$ — данный угол, $AB^2 + AC^2 = d^2$, где d — данный отрезок (рис. 56).

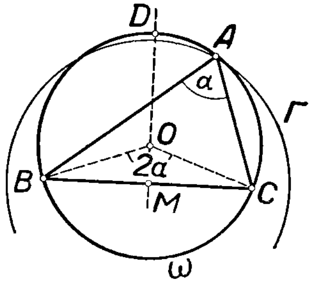

Рис. 56.

Величина хорды BC определяется из условия, что она видна из некоторой точки окружности ω под данным углом α, а следовательно, из центра O — под углом 2α (равным центральным углам соответствуют равные хорды). Что касается точки A, то она определяется двумя условиями: 1) она лежит на окружности ω; 2) она принадлежит ГМТ, для которых сумма квадратов расстояний от точек B и C равна d^2 (это тоже окружность, см. § 5, пример 1).

Построение. Строим последовательно: 1) окружность $\omega(O, R)$ с центром в произвольной точке O; 2) два радиуса OB и OC этой окружности под углом 2α один к другому; 3) отрезок BC и его середину M; 4) окружность Γ, служащую геометрическим местом таких точек P, для которых $BP^2 + CP^2 = d^2$ (см. § 5, пример 1); 5) точку A пересечения окружностей ω и Γ; 6) отрезки AB и AC. Треугольник ABC искомый. Доказательство ясно из анализа.

Исследование. Когда окружность Γ существует и имеет общую точку с дугой BDC окружности ω (см. рис. 56), то задача имеет единственное решение. В противном случае решения нет.

Замечание. Так как радиус r окружности Γ равен

$$\frac{1}{2}\sqrt{2d^2 - BC^2}$$

(см. § 5, пример 1), $MB = R \sin\alpha$, $BC = 2R\sin\alpha$, $MD = R(1 + \cos\alpha)$ то аналитически условие разрешимости можно записать так:

$$MB < r \leqslant MD$$

или после соответствующих преобразований:

$$2R\sin\alpha < d \leqslant 2R\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

§ 7. Радикальная ось и радикальный центр

В ряде вопросов геометрии используется ГМТ, называемое **радикальной осью** двух окружностей. Это понятие связано с понятием о степени точки относительно окружности.

Пусть на плоскости дана окружность ω и точка M. Проведём через точку M произвольную прямую a, пересекающую окружность ω, и пусть A и A' — точки их пересечения.

Будем рассматривать отрезки $\overline{MA}$ и $\overline{MA'}$ как направленные и назовём произведением этих отрезков произведение их длин MA и $\overline{MA'}$, взятое со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, направлены ли эти отрезки одинаково или противоположно. Если одна из точек A или A' совпадёт с точкой M, то будем считать произведение $\overline{MA} \cdot \overline{MA'}$ равным нулю.

Справедливо следующее предложение.

Если через некоторую фиксированную точку проводятся прямые, пересекающие данную окружность, то произведение направленных отрезков, соединяющих данную точку с точками пересечения каждой секущей с окружностью, сохраняет постоянное значение.

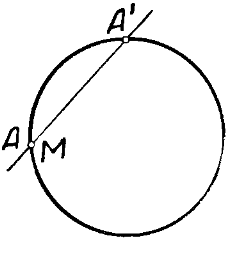

Рис. 57.

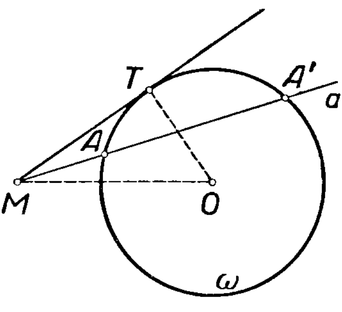

Рис. 58.

Возможны три случая.

1. Точка расположена на данной окружности (рис. 57). В этом случае $\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = 0$ при любом выборе секущей.

2. Точка M вне окружности (рис. 58). В этом случае отрезки $\overline{MA}$ и $\overline{MA'}$ направлены одинаково, $\overline{MA} \cdot \overline{MA'} =$

$=MA \cdot MA' = MT^2$, т. е. произведение направленных отрезков $\overline{MA}$ и $\overline{MA'}$ равно произведению их длин и равно квадрату отрезка касательной MT, проведённой из точки M к данной окружности (см. [9], гл. 3, п. 201).

3. Точка M внутри окружности (рис. 59).

В этом случае отрезки $\overline{MA}$ и $\overline{MA'}$ направлены противоположно один другому и их произведение отрицательно. Известно, что при этом абсолютная величина произведения направленных отрезков $\overline{MA}$ и $\overline{MA'}$ равна произведению отрезков диаметра, проведённого через точку M (см. [9], п. 200):

$$\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = -(MA \cdot MA') = -(MP \cdot MQ) = \text{const}.$$

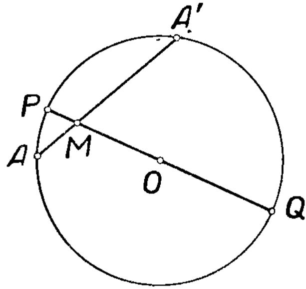

Рис. 59.

Итак, при любом расположении точки M относительно окружности ω произведение направленных отрезков секущей действительно не зависит от выбора секущей.

Произведение направленных отрезков, проведённых из точки M в точки пересечения окружности ω с любой секущей, проходящей через точку M, называется *степенью точки* M относительно окружности ω.

Будем обозначать эту величину символом C_ω^M.

Таким образом, если какая-либо секущая, проходящая через точку M, пересекает окружность ω в точках A и A', то $C_\omega^M = \overline{MA} \cdot \overline{MA'}$.

Ясно (см. п. 2 предыдущего доказательства), что если точка M расположена вне окружности ω, то C_ω^M равна квадрату отрезка касательной, проведённой из точки M к окружности ω.

Докажем, что при любом выборе точки M на плоскости

$$C_\omega^M = OM^2 - r^2,$$

где r — радиус окружности ω, O — её центр.

Рассмотрим возможные случаи.

1. Если точка M — внешняя относительно окружности ω, то (см. рис. 58)

$$C_\omega^M = MT^2 = OM^2 - OT^2 = OM^2 - r^2.$$

2. Если точка M расположена на окружности ω, то $OM = r$ и, так как, с другой стороны, $C_\omega^M = 0$, то, понятно, $C_\omega^M = OM^2 - r^2$.

3. В случае внутреннего расположения (см. рис. 59) $\overline{MA} \cdot \overline{MA'}$ равно произведению отрезков MP и MQ диаметра, взятому со знаком минус, так что

$$C_\omega^M = -MP \cdot MQ = -(r - OM)(r + OM) =$$
$$= -(r^2 - OM^2) = OM^2 - r^2.$$

Формула $C_\omega^M = OM^2 - r^2$ доказана, таким образом, для всех случаев.

Иногда выражение $OM^2 - r^2$ называют степенью точки по определению. Если уменьшать неограниченно радиус r окружности $\omega(O, r)$, не меняя положения её центра, то в пределе окружность ω превратится в точку O, а степень некоторой точки M относительно окружности ω — в квадрат отрезка OM. Можно рассматривать точку O как окружность нулевого радиуса и ввести следующее определение: степенью точки M относительно точки O называется квадрат отрезка MO.

Введём теперь определение радикальной оси.

Радикальной осью двух окружностей называется ГМТ, имеющих равные степени относительно этих окружностей.

Пусть на плоскости заданы две окружности $\omega_1(O_1, r_1)$ и $\omega_2(O_2, r_2)$. Положим для определённости $r_1 \geqslant r_2$. Рассмотрим геометрическое место точек M плоскости, для которых $C_{\omega_1}^M = C_{\omega_2}^M$. Согласно последней формуле, это равносильно требованию $O_1M^2 - r_1^2 = O_2M^2 - r_2^2$, т. е. $O_1M^2 - O_2M^2 = r_1^2 - r_2^2$, так что для точек искомого ГМТ разность квадратов расстояний от центров заданных окружностей остаётся постоянной. Такое ГМТ представляет собой, как известно (см. § 3, пример 3), прямую, перпендикулярную к линии центров данных окружностей (если только центры O_1 и O_2 не совпадают).

Для построения радикальной оси двух окружностей достаточно построить какую-либо одну её точку: прямая, проведённая через эту точку перпендикулярно линии центров, будет радикальной осью. Если данные окружности обладают общей касательной, то в качестве такой точки можно взять середину отрезка общей касательной между точками касания. Действительно, так как для внешней точки степень её относительно данной окружности выражается квадратом длины кальной оси (рис. 60).

касательной, то середина общей касательной двух данных окружностей имеет равные степени относительно данных окружностей и, следовательно, расположена на их радикальной оси (рис. 60).

Отсюда следует, между прочим, такой факт: если к двум окружностям можно провести четыре общие касательные, то все четыре середины отрезков общих касательных, заключённых между точками касания, располагаются на одной прямой.

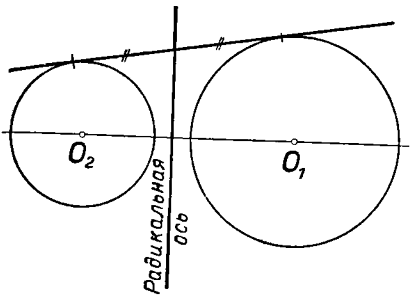

Рис. 60.

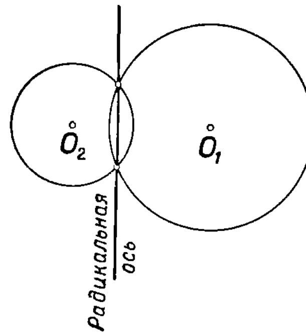

Рис. 61.

Если данные окружности пересекаются (рис. 61), то их радикальной осью служит прямая, проведённая через точки их пересечения, так как степень любой точки пересечения относительно каждой из данных окружностей равна нулю.

Если данные окружности касаются друг друга, то радикальной осью служит общая касательная, проведённая в точке касания окружностей (рис. 62).

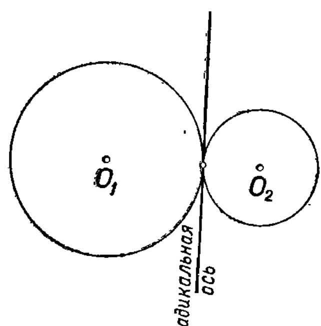

Рис. 62.

Построение радикальной оси для случая эксцентрического расположения данных окружностей, т. е. для случая, когда одна из окружностей расположена внутри другой, но центры их не совпадают, мы рассмотрим позже.

Если данные окружности концентрические, то для них радикальная ось не существует, потому что не существует точек, равностепенных относительно таких окружностей: соотношение $OM^2 - r_1^2 = OM^2 - r_2^2$ невозможно при $r_1 \neq r_2$.

Все вышеприведённые рассуждения остаются в силе, если одна из двух данных окружностей ω_1 „вырождается" в точку O_1. Если эта точка внешняя относительно второй окружности ω_2, то радикальная ось проходит через середину отрезка касательной, проведённой из точки O_1 к окружности ω_2. Этот предельный случай находит применение в некоторых задачах (см., например, задачи № 35—37 в конце этой главы).

В дальнейшем под окружностью можно подразумевать также „нулевую окружность", т. е. точку.

К важному понятию *радикального центра* приводит следующая теорема.

Теорема. *Если центры трёх окружностей не лежат на одной прямой, то три радикальные оси этих окружностей, взятых попарно, проходят через одну точку.*

Для доказательства рассмотрим в плоскости три окружности $\omega_1(O_1, r_1)$, $\omega_2(O_2, r_2)$ и $\omega_3(O_3, r_3)$ и предположим, что точки O_1, O_2 и O_3 не принадлежат одной прямой

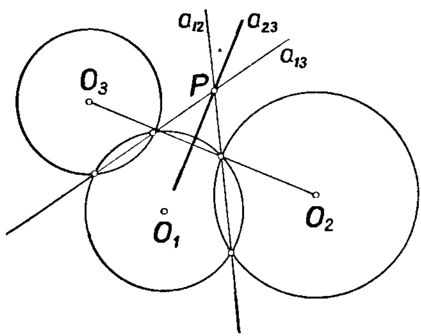

Рис. 63.

(рис. 63). Радикальная ось a_{12} окружностей ω_1 и ω_2 пересекает радикальную ось a_{13} окружностей ω_1 и ω_3, так как оси a_{12} и a_{13} соответственно перпендикулярны к двум пересекающимся прямым O_1O_2 и O_1O_3.

Пусть $a_{12} \times a_{13} \equiv P$. Так как $P \in a_{12}$, то $C^P_{\omega_1} = C^P_{\omega_2}$. Так же $C^P_{\omega_1} = C^P_{\omega_3}$. Поэтому $C^P_{\omega_2} = C^P_{\omega_3}$, т. е. точка P имеет равные степени относительно окружностей ω_2 и ω_3 и, следовательно, лежит на прямой a_{23}.

Итак, точка P принадлежит всем трём радикальным осям.

Общая точка радикальных осей трёх окружностей, рассматриваемых попарно, называется *радикальным центром* этих трёх окружностей.

Согласно доказанной теореме, для трёх окружностей, центры которых не расположены на одной прямой, существует единственный радикальный центр.

Если центры трёх окружностей ω_1, ω_2 и ω_3 располагаются на одной прямой, то возможны три случая.

1. Ось a_{12} (или a_{13}) не существует (случай, когда хотя бы две из трёх окружностей концентричны).

В этом случае не существует и радикальный центр.

2. Оси a_{12} и a_{13} различны. Тогда они параллельны и радикальный центр опять не существует.

3. Оси a_{12} и a_{13} совпадают. Тогда с ними совпадает также ось a_{23}. Каждая точка общей радикальной оси является радикальным центром трёх данных окружностей.

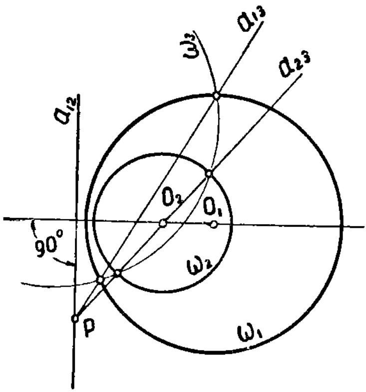

Рис. 64.

Радикальным центром можно воспользоваться для построения радикальной оси двух данных окружностей, в частности, и в том случае, если окружности эти эксцентрические. Пусть надо построить радикальную ось двух окружностей $\omega_1(O_1, r_1)$ и $\omega_2(O_2, r_2)$ (рис. 64). Строим произвольную окружность $\omega_3(O_3, r_3)$, пересекающую обе окружности ω_1 и ω_2 и имеющую центр O_3 вне прямой O_1O_2. Строим затем радикальный центр P как точку пересечения радикальных осей a_{13} и a_{23}. Через точку P проводим прямую a_{12}, перпендикулярную прямой O_1O_2. Прямая a_{12} является, очевидно, радикальной осью окружностей ω_1 и ω_2.

Укажем одно интересное свойство радикальной оси, полезное при решении некоторых задач на построение.

Теорема. *Внешняя относительно каждой из двух данных окружностей часть их радикальной оси является ГМТ, каждая из которых служит центром некоторой окружности, пересекающей данные окружности под прямым углом.*

Пусть ω_1 и ω_2 — две данные окружности, a_{12} — их радикальная ось. Изберём на радикальной оси a_{12} любую точку A, внешнюю к данным окружностям. Тогда (рис. 65) отрезки AT_1 и AT_2 касательных, проведённых из точки A к данным окружностям, одинаковы. Пусть $AT_1 = AT_2 = r$. Проведём окружность $\omega(A, r)$. Радиусы O_1T_1 и O_2T_2 данных окружностей перпендикулярны касательным AT_1 и AT_2, так как проведены в точки касания. Поэтому прямые O_1T_1 и O_2T_2 служат касательными к окружности ω в точках её пересечения с данными окружностями. Таким образом,

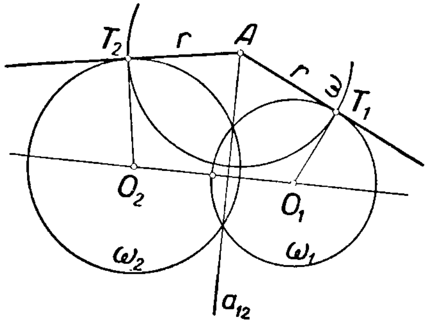

Рис. 65.

касательные к окружностям ω и ω_1, проведённые в точке их пересечения T_1, как и касательные к окружностям ω и ω_2, проведённые в точке их пересечения T_2, взаимно перпендикулярны, т. е. окружность ω пересекает каждую из данных окружностей ω_1 и ω_2 под прямым углом.

Обратно: если какая-либо окружность ω пересекает каждую из данных окружностей ω_1 и ω_2 соответственно в точках T_1 и T_2 под прямыми углами, то это означает, что в точке T_1 (соответственно T_2) касательная к окружности ω_1 (соответственно к ω_2) проходит через центр A окружности ω. Таким образом, касательные из точки A к окружностям ω_1 и ω_2 равны, как радиусы окружности ω. Следовательно, точка A принадлежит радикальной оси a_{12}.

Понятия радикальной оси и радикального центра могут быть использованы при решении некоторых геометрических задач на построение.

Задача. Построить окружность, касательные к которой из данных точек A, B и C были бы равны соответственно трём данным отрезкам a, b и c.

Анализ. Пусть $\omega(O, r)$ — искомая окружность (рис. 66), AA_1 — касательная к ω, A_1 — точка касания. Тогда $AA_1 = a$ и $A_1O \perp AA_1$. Поэтому точка A_1 лежит на окружности $\omega_1(A, a)$

и касательная к ω_1 из точки O равна r. Аналогично получим, что касательные из точки O к $\omega_2(B, b)$ и к $\omega_3(C, c)$ также должны быть равны r. Итак, касательные из точки O к трём окружностям ω_1, ω_2 и ω_3 должны быть равны между собой. Следовательно, точка O является радикальным центром этих окружностей.

Построение. Строим последовательно:

1) три окружности: $\omega_1(A; a)$, $\omega_2(B, b)$, $\omega_3(C, c)$;

2) радикальный центр этих окружностей O;

3) касательную из точки O к окружности ω_1;

4) точку касания A_1;

5) окружность $\omega(O, r)$, где $r = OA_1$. Эта окружность искомая.

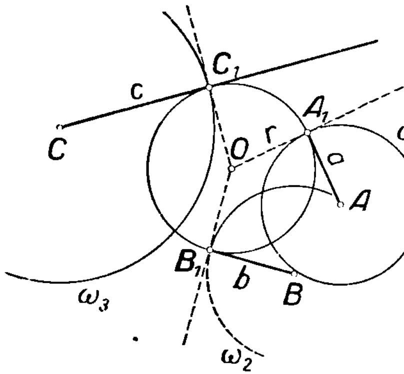

Рис. 66.

Доказательство. Если приведённое построение выполнимо, то $C^O_{\omega_1} = OA_1^2 = r^2 > 0$. Но $C^O_{\omega_1} = C^O_{\omega_2} = C^O_{\omega_3}$, так что $C^O_{\omega_2} > 0$, $C^O_{\omega_3} > 0$ и точка O лежит вне окружностей ω_2 и ω_3. Поэтому из точки O можно провести касательные к окружностям ω_2 и ω_3. Обозначим эти касательные через OB_1 и OC_1. Тогда $C^O_{\omega_2} = OB_1^2$, $C^O_{\omega_3} = OC_1^2$, так что $OB_1^2 = OC_1^2 = OA_1^2$, т. е. $OB_1 = OC_1 = OA_1 = r$, вследствие чего точки B_1 и C_1 лежат на окружности ω. Так как OA_1 касается окружности ω_1, то $OA_1 \perp AA_1$. Следовательно, AA_1 касается окружности $\omega(O, r)$, причём $AA_1 = a$, как радиус окружности ω_1. Аналогично можно доказать, что BB_1 и CC_1 касаются $\omega(O, r)$, причём $BB_1 = b$, $CC_1 = c$, так что ω — действительно искомая окружность.

Исследование. Проводя исследование по ходу построения, приходим к такому выводу.

1. Если точки A, B и C не лежат на одной прямой, то возможны три случая: 1) точка O вне $\omega_1(A, a)$; тогда она обязательно лежит вне ω_2 и ω_3 (как установлено выше в ходе доказательства); задача имеет единственное решение; 2) точка O внутри ω_1; решений нет; 3) точка O на окружности ω_1; тогда $C^O_{\omega_3} = C^O_{\omega_2} = C^O_{\omega_1} = 0$, так что O — общая точка трёх окружностей; задача не имеет решений: искомая окружность „вырождается" в точку.

2. A, B и C на одной прямой. Представляются две возможности: либо радикального центра нет, либо радикальных центров бесконечно много. В соответствии с этим задача либо неразрешима, либо имеет бесконечно много решений.

§ 8. Пучки окружностей

При решении некоторых задач на построение оказывается полезным понятие о пучке окружностей. Прежде чем ввести это понятие, докажем некоторые теоремы.

Теорема 1. *Если прямая a служит радикальной осью окружностей $\omega_1(O_1, r_1)$ и $\omega_2(O_2, r_2)$ и одновременно радикальной осью окружностей ω_1 и $\omega_3(O_3, r_3)$, то прямая a служит радикальной осью окружностей ω_2 и ω_3 и центры всех трёх окружностей располагаются на одной прямой.*

Пусть P — произвольная точка прямой a. По условию $C^P_{\omega_1} = C^P_{\omega_2}$ и $C^P_{\omega_1} = C^P_{\omega_3}$, откуда следует, что $C^P_{\omega_2} = C^P_{\omega_3}$, так что прямая сливается с радикальной осью окружностей ω_2 и ω_3.

Точки O_1, O_2 и O_3 на одной прямой, так как $O_1O_2 \perp a$ и $O_1O_3 \perp a$.

Теорема 2. *Если даны две окружности, обладающие радикальной осью, то через каждую точку плоскости, лежащую вне их радикальной оси, можно провести единственную окружность, имеющую с каждой из данных ту же радикальную ось.*

1-й случай. Данные окружности пересекаются.

Искомая окружность определяется данной точкой и двумя точками пересечения данных окружностей.

2-й случай. Данные окружности касаются друг друга.

При этом, как известно, радикальной осью служит их общая касательная. Искомая окружность должна касаться радикальной оси в той же точке. Таким образом, для построения искомой окружности мы располагаем прямой, на которой должен лежать её центр (это перпендикуляр к радикальной оси в точке касания данных окружностей) и двумя точками окружности (точка касания и данная точка). Этими данными положение искомой окружности однозначно определяется.

3-й случай. Данные окружности не имеют общих точек.

Пусть A — данная точка, $\omega_1(O_1, r_1)$ и $\omega_2(O_2, r_2)$ — данные окружности, a_{12} — их радикальная ось. Рассмотрим две возможности.

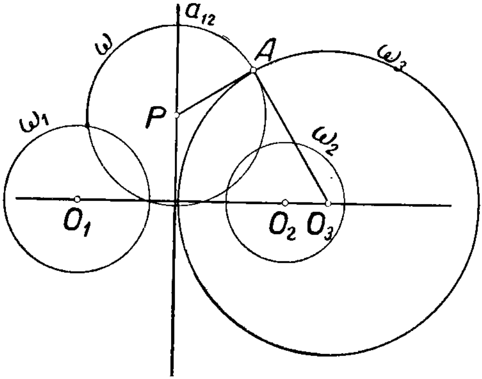

Рис. 67.

1) Точка A вне прямой O_1O_2 (рис. 67). Пусть P — радикальный центр трёх окружностей: ω_1, ω_2 и „нулевой окружности" A. Тогда $C^p_{\omega_1} = C^p_{\omega_2} = PA^2$. Проведём вспомогательную окружность $\omega(P, PA)$ и к ней касательную AO_3 в точке A до пересечения с прямой O_1O_2 в точке O_3 (такая точка существует, так как A вне прямой a_{12})

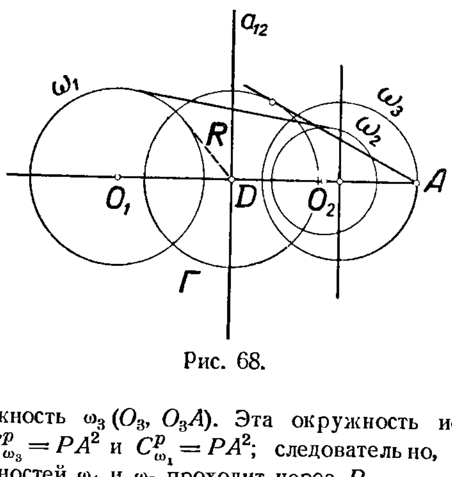

Рис. 68.

Строим окружность $\omega_3(O_3, O_3A)$. Эта окружность искомая. Действительно, $C^p_{\omega_3} = PA^2$ и $C^p_{\omega_1} = PA^2$; следовательно, радикальная ось a_{13} окружностей ω_1 и ω_3 проходит через P.

Кроме того, $a_{13} \perp O_1O_3$, так что $a_{13} \equiv a_{12}$. Аналогично $a_{23} \equiv a_{12}$.

2) Точка A на прямой O_1O_2 (рис. 68).

Пусть $\vec{D} \equiv \vec{O_1 O_2} \times a_{12}$. Можно провести окружность $\Gamma(D, \dot{R})$, ортогональную к ω_1 и ω_2, а через A — окружность ω_3, имеющую центр на прямой O_1O_2 и ортогональную окружности Γ (для этого достаточно построить точку пересечения прямой O_1O_2 с радикальной осью окружности Γ и точки A). Ясно, что $C_{\omega_3}^D = R^2 = C_{\omega_1}^D$, т. е. точка D на радикальной оси a_{13} окружностей ω_1 и ω_3. Кроме того, $a_{13} \perp O_1O_3$. Следовательно, и в этом случае a_{13} совпадает с a_{12}.

Докажем, что через данную точку A при любом из двух рассмотренных предположений можно провести только одну окружность, удовлетворяющую условиям теоремы. Доказательство — от противного. Допустим, что две окружности ω_3 и ω_4 проходят через точку A, причём прямая a_{12} служит радикальной осью окружностей ω_3 и ω_1 и в то же время радикальной осью окружностей ω_4 и ω_1. Тогда в силу теоремы 1 радикальная ось окружностей ω_3 и ω_4 совпадает с a_{12}. Но $C_{\omega_3}^A = C_{\omega_4}^A = 0$, ибо A — общая точка окружностей ω_3 и ω_4. Следовательно, $A \in a_{34}$, т. е. $A \in a_{12}$, вопреки условию теоремы.

Согласно теоремам 1 и 2, каждый раз, когда заданы какие-либо две окружности, обладающие радикальной осью a, можно построить бесконечное множество таких окружностей, что для каждых двух из них прямая a будет служить радикальной осью.

Определение. Множество всех окружностей плоскости, обладающих попарно одной и той же радикальной осью, называется *пучком* окружностей.

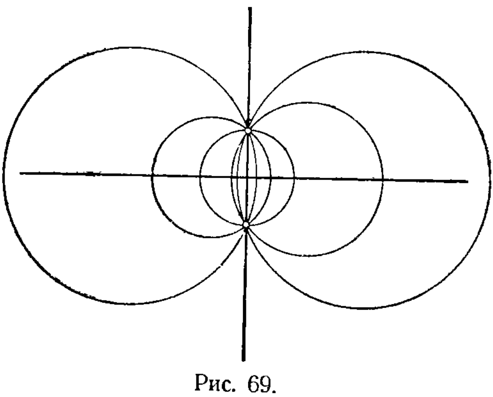

Рис. 69.

Из предыдущего ясно, что две окружности пучка однозначно определяют этот пучок, т. е. для каждой окружности можно сказать, принадлежит ли она этому пучку или нет. В зависимости от того, имеют ли эти окружности две, одну или ни одной общей точки, различают пучки *эллиптические* (рис. 69), *параболические* (рис. 70) и *гиперболические* (рис. 71).

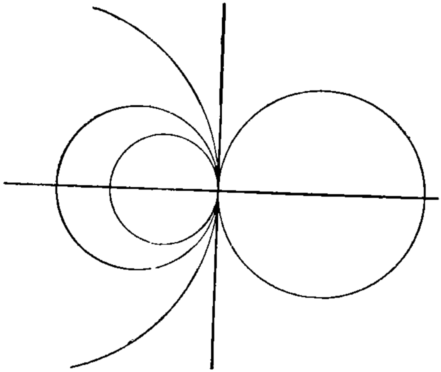

Рис. 70.

Прямая, служащая общей радикальной осью для всех пар окружностей пучка, называется *осью* этого пучка. Общая

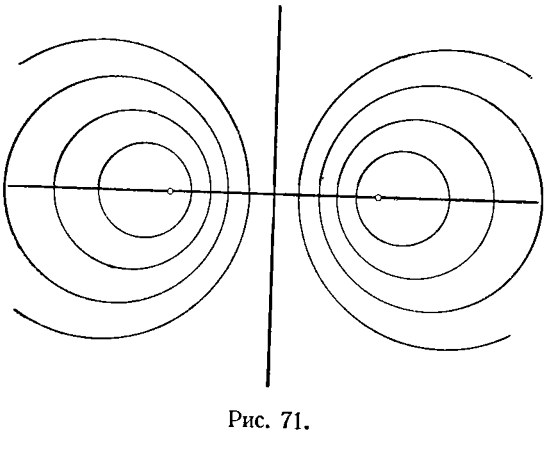

Рис. 71.

точка всех окружностей параболического или эллиптического пучка называется иногда *центром пучка*.

Приведем некоторые примеры применения понятия пучка к решению геометрических задач на построение.

Задача 1. Через две данные точки A и B провести окружность так, чтобы она касалась данной прямой a.

Анализ. Искомая окружность принадлежит эллиптическому пучку окружностей, проходящих через точки A и B. Прямая a служит осью этого пучка, и поэтому касательные ко всем окружностям пучка, проведённые из какой-либо точки этой прямой, равны между собой.

В качестве такой точки можно взять точку C пересечения прямой AB с данной прямой a (рис. 72). После этого

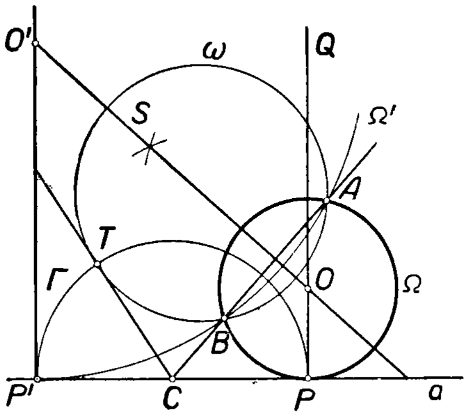

Рис. 72.

нетрудно построить точку P касания искомой окружности к прямой a: отрезок CP равен касательной к любой окружности пучка.

Построение. Строим последовательно:

1) точку $C \equiv AB \times a$;

2) произвольную окружность ω, проходящую через A и B;

3) касательную CT к окружности ω;

4) окружность $\Gamma(C,\ CT)$;

5) точку P пересечения окружности Γ с прямой a;

6) прямую $PQ \perp a$;

7) симметраль s точек A и B;

8) точку $O \equiv s \times PQ$.

9) окружность $\Omega(O,\ OA)$. Эта окружность — искомая. Доказательство опускаем.

Исследование. Задача получает два решения ($\Omega(O,\ OP)$ и $\Omega'(O',\ O'P')$ на рис. 72), если AB не параллельна прямой a и точки A и B расположены по одну сторону прямой a. Если прямая a пересекает отрезок AB, то решения не существует. Если какая-либо одна из точек A и B расположена на прямой a, то решение единственно и построение упрощается. Если одновременно $A \in a$ и $B \in a$, то решения нет. Если прямая AB параллельна прямой a, то задача имеет единственное решение, которое может быть получено из совершенно элементарных соображений.

Задача 2. Построить окружность ω, касающуюся данной окружности ω_0 и данной прямой a в данной на ней точке A.

Искомая окружность принадлежит параболическому пучку с осью a и центром A. Пусть ω' (рис. 73) — любая окруж-

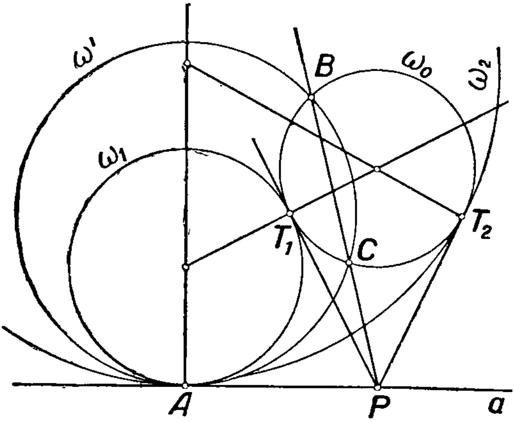

Рис. 73.

ность этого пучка, пересекающая данную окружность ω_0 в точках B и C. Точка P пересечения прямой BC с прямой a будет радикальным центром трёх окружностей ω_0, ω' и ω. Поэтому касательная из P к ω_0 будет также касательной к искомой окружности ω. Проведя такие касательные PT_1 и PT_2, получим два возможных положения точки касания искомой окружности к данной. После этого ясно, как построить искомую окружность. На рисунке 73 ω_1 и ω_2 — два возможных решения. Исследование решения предоставляем читателю.

При решении некоторых конструктивных задач (например, при построении окружности, пересекающей данную под прямым углом или в двух диаметрально противоположных точках) полезно воспользоваться понятием связки окружностей. *Связкой окружностей называется множество всех окружностей плоскости, относительно которых данная точка O имеет одну и ту же степень.* Точку O называют *центром* связки. Ясно, что центр связки является радикальным центром любой тройки окружностей из этой связки.

Читатель может подробнее ознакомиться со свойствами связок окружностей и применениями этого понятия по книге Н. Ф. Четверухина (25) или по книге А. Н. Перепёлкиной и С. И. Новосёлова „Геометрия и тригонометрия" (Учпедгиз, 1947).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что называется ГМТ, обладающих указанным свойством?
2. Перечислите ГМТ, рассматриваемые в школьном курсе геометрии.
3. Какие вы знаете ГМТ, не изучаемые в школьном курсе?
4. Как надо понимать задачу: „найти ГМТ, обладающих данным свойством"?
5. Верно ли, что геометрическое место вершин треугольников, имеющих общее основание AB и равные высоты (длины h), есть прямая, параллельная прямой AB и находящаяся от неё на расстоянии h?
6. В чём сущность метода геометрических мест при решении геометрических задач на построение?
7. Что называется степенью точки относительно окружности?
8. Какой формулой выражается степень точки M относительно окружности (O, r)?
9. Что называется радикальной осью двух окружностей?
10. Как построить радикальную ось двух окружностей, если эти окружности пересекаются? касаются одна другой?
11. Как построить радикальную ось двух окружностей, не имеющих общих точек, но обладающих общей касательной?
12. Как построить радикальную ось двух эксцентрических окружностей?
13. В каком случае не существует радикальной оси двух окружностей?
14. Что называется радикальным центром трёх окружностей?
15. В каких случаях для трёх заданных окружностей не существует их радикального центра?
16. Что называется пучком окружностей? какие виды пучков вы знаете?
17. Верно ли, что радикальная ось двух окружностей есть геометрическое место точек, касательные из которых к данным окружностям одинаковы?

ЗАДАЧИ

1. Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.
2. Найти геометрическое место середин отрезков, отсекаемых

боковыми сторонами данного треугольника на прямых, проведённых параллельно его основанию.

3. Найти геометрическое место центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной окружности.

4. Найти геометрическое место центров окружностей данного радиуса, отсекающих на данной прямой хорды данной длины.

5. Найти геометрическое место центров окружностей данного радиуса, имеющих с данной окружностью (O, r) общие хорды данной длины d.

6. Найти ГМТ, расположенных внутри данного угла AOB, которые вдвое дальше отстоят от стороны OA, чем от стороны OB.

7. Найти ГМТ, расстояния которых от двух данных прямых находятся в данном отношении $\frac{m}{n}$.

8. Найти ГМТ, делящих внутренним образом (соответственно внешним образом) хорды данной окружности, имеющие данную длину, в данном отношении $\frac{m}{n}$.

9. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на прямые, проведённые через другую данную точку.

10. Отрезок данной длины движется так, что концы его скользят по сторонам прямого угла. Какую линию опишет его середина?

11. Две данные точки A и B лежат на данной окружности (O, r). Пусть M — произвольная точка окружности. На продолжении хорды AM откладывают отрезок MN, равный BM. Какую линию опишет точка N, если точка M описывает окружность (O, r)?

12. Даны окружность (O, r) и её диаметр AB. На произвольной хорде AM (или на её продолжении) откладываем отрезок $AN = BM$. Найти геометрическое место точек N, если точка M описывает окружность (O, r).

13. Найти ГМТ, для которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная (не применяя методов аналитической геометрии).

14. Найти ГМТ, равноудалённых от трёх данных попарно пересекающихся прямых.

15. Найти геометрическое место центров окружностей данного радиуса, пересекающих данную окружность под прямым углом.

16. Две окружности, касающиеся одна другой, касаются данной прямой в двух данных точках A и B. Найти геометрическое место точек касания всех пар окружностей, удовлетворяющих этому условию.

17. Найти ГМТ, для которых разность расстояний от двух данных параллельных прямых равна данному отрезку. Рассмотрите три возможных случая.

18. Найти ГМТ, сумма расстояний которых от сторон данного равностороннего треугольника равна его высоте.

19. Найти геометрическое место точек, координаты которых относительно некоторой прямоугольной системы удовлетворяют уравнению

$$|x| + |y| = 1.$$

20. Дан остроугольный треугольник. Найти геометрическое место центров прямоугольников, вписанных в этот треугольник так, что основания прямоугольников лежат на основании треугольника, а две вершины — на боковых сторонах треугольника.

21. Построить треугольник по основанию, высоте и боковой стороне.

22. Построить треугольник по основанию, высоте и медиане, проведённой к боковой стороне.

23. Построить треугольник по основанию, высоте и радиусу описанной окружности.

24. Построить окружность, которая касалась бы данной окружности в данной точке и данной прямой.

25. Построить окружность данного радиуса, касающуюся данной окружности и данной прямой.

26. Построить окружность, проходящую через две данные точки и отсекающую на двух данных пересекающихся прямых равные хорды.

27. Построить окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и отсекающую от данной прямой хорду данной длины.

28. Построить окружность данного радиуса, касающуюся данной окружности и отсекающую от данной прямой хорду данной длины.

29. Построить окружность данного радиуса, отсекающую на трёх данных попарно пересекающихся прямых равные хорды.

30. Построить окружность данного радиуса r, касающуюся данной прямой c и отсекающую равные хорды на двух других данных параллельных прямых a и b.

31. Решить аналогичную задачу в предположении, что прямые a и b пересекаются.

32. Внутри данного треугольника построить точку, из которой его стороны были бы видны под равными углами.

33. Наблюдатель, имеющий в своём распоряжении карту того участка местности, на котором он находится, видит три предмета, отмеченных на карте. Кроме того, он имеет возможность измерять углы между направлениями, по которым он видит эти предметы. Требуется указать на карте пункт, где находится наблюдатель. (Задача Потено.)

34. Построить ромб по стороне и радиусу вписанной окружности.

35. Построить треугольник по основанию, высоте и отношению боковых сторон.

36. Даны три точки A, B и C. Провести через A окружность так, чтобы отрезки касательных к ней из точек B и C были соответственно равны данным отрезкам b и c.

37. Через две данные точки провести окружность, делящую пополам данную окружность.

38. Найти такую точку, чтобы касательные, проведённые из неё к двум данным окружностям, были равны её расстоянию от данной точки.

39. На данной окружности найти такую точку, чтобы касательная из неё к другой данной окружности была равна расстоянию искомой точки от некоторой данной точки.

Глава III

ДВИЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ПОСТРОЕНИЯМ

§ 1. Общее понятие о точечных преобразованиях фигур

Пусть Ф — некоторая фигура, расположенная в плоскости. Пусть установлено некоторое правило, в силу которого каждой точке M фигуры Ф ставится в соответствие некоторая определённая точка M' той же плоскости. Тогда говорят, что в плоскости установлено *преобразовние* фигуры Ф. При этом точка M' называется *образом* точки M, а точку M называют *прообразом* точки M'. Совокупность всех точек, соответствующих точкам данной фигуры Ф, образует некоторую фигуру Ф′, которая называется *образом* данной фигуры; при этом первоначальную фигуру называют *прообразом* фигуры Ф′.

Фигура Ф может быть, в частности, всей плоскостью.

Указанное выше правило соответствия может быть задано в словесной форме или осуществляться в форме определённого геометрического построения, или, наконец, формулироваться аналитически.

Следующие примеры дают представление о различных способах задания преобразований фигур.

Пример 1. Каждой точке плоскости ставится в соответствие эта же точка. Такое преобразование называется *тождественным преобразованием* плоскости. При этом преобразовании плоскости каждая фигура преобразуется в себя.

Пример 2. Каждой точке плоскости ставится в соответствие одна и та же точка O этой плоскости.

Пример 3. Пусть (рис. 74) некоторая сфера касается данной плоскости α и пусть O — центр этой сферы, Для построения образа M' точки M, произвольно выбранной в данной плоскости, проводим отрезок OM и отмечаем точку P его пересечения с данной сферой. Образом точки M считаем ортогональную проекцию точки P на данную плоскость.

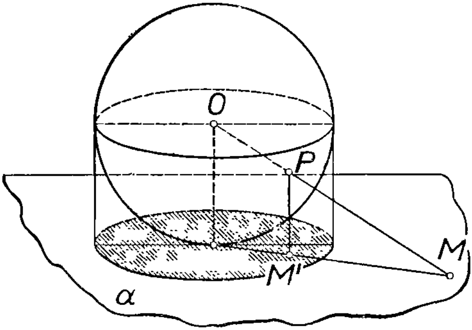

Рис. 74.

Пример 4. На данной плоскости строим прямоугольную систему координат. Пусть $M(x;\ y)$ — какая-либо точка плоскости. Если $x \leqslant 0$, то полагаем $M' \equiv M$, т. е. принимаем за образ ту же точку. Если же $x > 0$, то полагаем

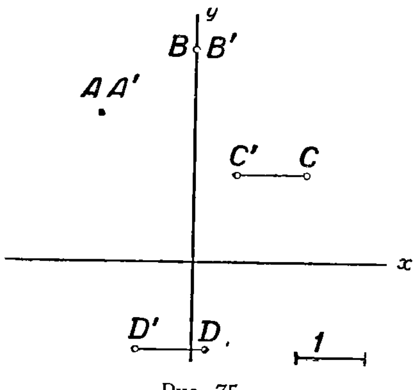

Рис. 75.

$M'(x-1;\ y)$. Иначе говоря, сохраняем ординаты всех точек, а также сохраняем неположительные абсциссы, а положительные абсциссы уменьшаем на 1.

На рисунке 75 изображены некоторые точки и их образы в данном преобразовании.

Наиболее важную роль в геометрии играют так называемые взаимно однозначные преобразования. Преобразование фигуры называется *взаимно однозначным* или одно-однозначным (1 — 1-значным), если каждая точка фигуры-образа имеет только один прообраз.

Пример 1 представляет 1 — 1-значное преобразование всей плоскости в себя. В примере 3 описано 1 — 1-значное преобразование всей плоскости во внутреннюю часть круга, центром которого служит проекция точки O на плоскость α, а радиус равен радиусу данной сферы (на рис. 74 этот круг заштрихован). Простой пример взаимно однозначного преобразования полуокружности в отрезок получим, если сопоставим каждой точке полуокружности AmB (рис. 76) её ортогональную проекцию на диаметр AB.

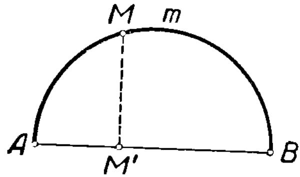

Рис. 76.

Согласно определению, нарушение взаимной однозначности преобразования происходит вследствие того, что различные точки фигуры Ф отображаются в одну и ту же точку фигуры Ф′, так что некоторые точки фигуры Ф′ будут обладать несколькими прообразами или даже бесконечным множеством прообразов. Так, преобразование, приведённое в примере 2, не является 1 — 1-значным, так как любую точку плоскости можно считать за прообраз точки O.

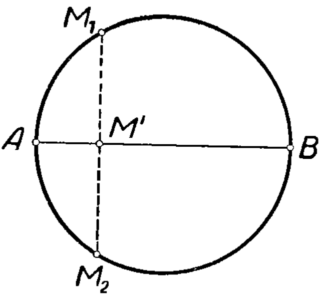

Рис. 77.

Рассмотрим ещё пример. Пусть каждой точке некоторой окружности ω (рис. 77) ставится в соответствие её проекция на один и тот же диаметр AB; такое преобразование окружности в отрезок не будет 1 — 1-значным, так как каждая точка диаметра AB (за исключением его концов) будет служить образом двух различных точек окружности. Если же каждой точке некоторого *круга* сопоставить её проекцию на один и тот же диаметр этого круга, то каждая точка этого диаметра (кроме его концов) будет иметь бесконечно много прообразов, так что преобразование также не будет взаимно однозначным.

Приведённый выше пример 4 интересен тем, что каждая точка $(x;\ y)$, абсцисса которой положительна, или меньше, чем минус единица, обладает единственным прообразом $(x+1;\ y)$. Таковы точки A' и C' (рис. 75). Точки же $(x;\ y)$, для которых $-1 < x \leqslant 0$, обладают двумя прообразами: $(x;\ y)$ и $(x+1;\ y)$. Таковы, например, точки B' и D' (рис. 75). Следовательно, преобразование, описанное в примере 4, не является взаимно однозначным.

В случае 1—1-значного преобразования П, помимо данного соответствия $M \to M'$, возникает одновременно соответствие $M' \to M$, так как каждая точка фигуры Ф′ обладает единственным, вполне определённым прообразом. Это новое преобразование, которое ставит в соответствие каждой точке фигуры Ф′ её прообраз в данном преобразовании, называют *обратным* данному преобразованию П и обозначают знаком Π^{-1}.

Среди взаимно однозначных преобразований особую роль играют *движения*.

Движением на плоскости называют в геометрии всякое преобразование, обладающее следующим свойством: если A и B — две произвольные точки фигуры Ф, преобразующиеся соответственно в точки A' и B', то отрезки AB и $A'B'$ равны между собой.

Из самого определения следует, что движения суть 1—1-значные преобразования: если бы две различные точки A_1 и A_2 преобразовались движением в одну и ту же точку A', то, по определению, имело бы место соотношение $A_1A_2 = A'A'$, т. е. точки A_1 и A_2 совпадали бы, что невозможно.

Понятие равенства отрезков в современной геометрии вводится иногда без определения. Относительно этого понятия предполагается только, что оно удовлетворяет некоторым аксиомам. Мы принимаем именно эту точку зрения. Возможна и другая точка зрения, когда в качестве основного понятия принимается понятие движения, после чего понятие равенства определяется с помощью понятия движения. Вопрос о равенстве и движении подробно рассмотрен, например, в [20], ч. I, § 18, 19 и 30. Заметим, что при наличии некоторых инструментов (например, при наличии циркуля) для двух данных отрезков всегда можно установить, равны они или нет.

Можно доказать, что движение преобразует отрезок в отрезок, прямую — в прямую, луч — в луч, окружность — в окружность того же радиуса.

Две произвольные фигуры принято называть *равными*, если существует движение, преобразующее одну из них в другую, так что всякое движение преобразует каждую фигуру в равную ей фигуру.

Применение преобразований к геометрическим построениям часто называют в теории геометрических построений *методом геометрических преобразований*. Идея метода геометрических преобразований состоит в том, что искомую или данную фигуру преобразуют так, чтобы после этого построение стало проще или даже непосредственно свелось к какой-либо элементарной задаче.

После этих предварительных замечаний перейдём к рассмотрению некоторых видов движений и их применений к геометрическим построениям.

§ 2. Параллельный перенос

Пусть на плоскости задан некоторый вектор $\vec{v} \equiv \overrightarrow{OO'}$.

Параллельным *переносом* фигуры Ф на вектор $\vec{v}$ называется такое преобразование фигуры Ф, при котором каждой точке M этой фигуры ставится в соответствие такая точка M' плоскости, что выполняется условие: $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ (см. рис. 78).

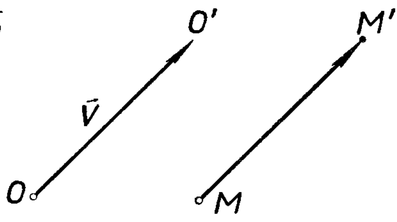

Рис. 78.

Очевидно, любая заданная пара соответственных точек вполне определяет перенос, так как если задана точка A и соответствующая ей точка A', то, по определению, $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$.

Перенос является движением, так как из того, что векторы $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$ равны одному и тому же вектору $\overrightarrow{OO'}$, следует, что $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, а отсюда вытекает равенство отрезков AB и $A'B'$. Поэтому при переносе каждая фигура преобразуется в равную ей фигуру.

Для *прямолинейных* фигур построение их образов в данном переносе осуществляется по нескольким точкам. Для построения образа данной окружности строят образ её центра и, принимая его за центр, проводят окружность тем же радиусом.

Применение параллельного переноса для геометрических построений называют *методом параллельного переноса.* Сущность этого метода состоит в том, что наряду с данными и искомыми фигурами рассматриваются некоторые другие фигуры, которые получаются из данных или искомых фигур или их частей путём переноса на некоторый вектор. Этим путём иногда удаётся облегчить проведение анализа. Метод параллельного переноса применяют главным образом для объединения разрозненных частей фигур. Особенно часто этим методом пользуются для построения многоугольников. Иногда метод переноса оказывается полезным при решении задач на „кратчайший путь".

Пример 1. Построить трапецию по заданным её сторонам.

Подробнее: требуется построить трапецию так, чтобы её основания были соответственно равны данным отрезкам a и b $(a > b)$, а боковые стороны были соответственно равны двум данным отрезкам c и d $(c \leqslant d)$.

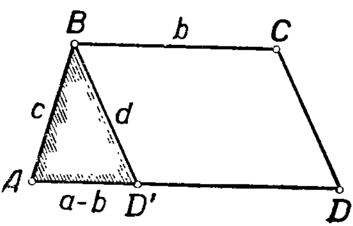

Рис. 79.

Анализ. Допустим, что $ABCD$ — искомая трапеция, причём AD — её большее основание, BC — меньшее основание, AB и CD — боковые стороны, причём $AB = c$, $CD = d$.

Представим себе перенос, определяемый вектором $\overrightarrow{CB}$. Тогда (см. рис. 79) сторона CD преобразуется в отрезок BD'. Треугольник ABD' может быть построен, так как все стороны его известны. Чтобы построить искомую трапецию, останется подвергнуть отрезок BD' переносу на вектор $\overrightarrow{BC}$, длина которого известна и который направлен одинаково с вектором $\overrightarrow{AD}$.

Построение. 1) Построим треугольник ABD' по сторонам $AB = c$, $BD' = d$ и $AD' = a - b$. 2) Через точку B проведём луч, одинаково направленный с лучом AD'. 3) На этом луче построим точку C так, чтобы $BC = b$. 4) Через C проведём прямую CD параллельно BD' до пересечения с продолжением AD' в точке D. $ABCD$ — искомая трапеция.

Доказательство. $AB = c$, $BC = b$ по построению; $AD = AD' + D'D = AD' + BC = a - b + b = a$. $CD = BD'$, как отрезки параллельных прямых между параллельными прямыми.

Исследование. Первый шаг выполним при условии:

$$d-c<a-b<d+c.$$

При этом условии однозначно выполнимы и все остальные шаги построения. Заметим также, что треугольник ABD', а следовательно, и трапеция $ABCD$ определяются условиями задачи однозначно до равенства. Поэтому при условии $d-c<a-b<d+c$ задача имеет единственное решение. Если же это условие не выполняется, то задача решения не имеет.

Пример 2. Построить выпуклый четырёхугольник, зная три его угла и две противоположные стороны.

Подробнее: даны два отрезка a и b и три угла α, β и δ. Требуется построить четырёхугольник $ABCD$ так, чтобы $\measuredangle A=\alpha$, $\measuredangle B=\beta$, $\measuredangle D=\delta$, $AD=a$, $CB=b$. Предполагается, что $0°<\alpha<180°$, $0°<\beta<180°$, $0°<\delta<180°$.

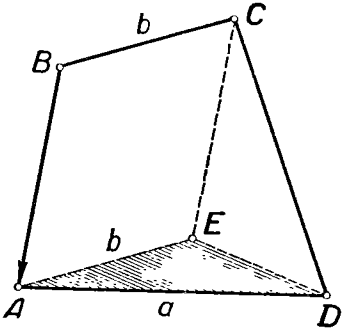

Рис. 80.

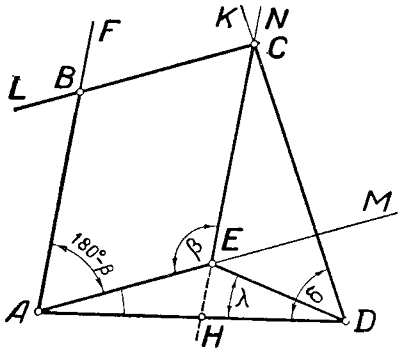

Рис. 81.

Анализ. Допустим, что $ABCD$ (рис. 80) — искомый четырёхугольник. Перенесём сторону BC на вектор $\overrightarrow{BA}$, и пусть отрезок BC займёт после переноса положение AE. Тогда в $\triangle AED$ известны:

$$AD=a,\ AE=b,\ \measuredangle DAE=\measuredangle BAD-\measuredangle BAE=$$
$$=\measuredangle A-(180°-\measuredangle B)=\alpha+\beta-180°.$$

По этим данным $\triangle AED$ может быть построен.

Построение. 1) На произвольной прямой строим отрезок $AD=a$ (рис. 81). 2) Через точку A проводим луч

AM под углом $\alpha+\beta-180^\circ$ к лучу AD. 3) Откладываем на луче AM отрезок $AE=b$. 4) Строим луч EN, образующий с EA угол β и расположенный с точкой D по разные стороны от прямой AM. 5) Строим луч DK так, чтобы $\angle ADK$ был равен δ и чтобы луч DK располагался по ту же сторону прямой DE, что и луч EN. 6) Отмечаем точку C пересечения лучей EN и DK — третью вершину четырёхугольника. 7) Четвёртая вершина B получается в пересечении прямой AF, параллельной CE, с прямой CL, параллельной AE.

Доказательство.

$$\angle BAD = \angle BAE + \angle DAE = (180^\circ - \beta) + \\ + (\alpha + \beta - 180^\circ) = \alpha.$$

$\angle ABC = \angle CEA$, как углы, стороны которых соответственно параллельны и противоположно направлены. $\angle CEA = \beta$ по построению. $\angle ADC = \delta$ по построению. Отрезок $AD = a$ по построению. $BC = AE$, как отрезки параллельных между параллельными. Но $AE = b$, а значит и $BC = b$.

Исследование.

Так как сумма углов всякого четырёхугольника равна 360°, то для возможности построения необходимо, чтобы сумма данных углов α, β и δ была меньше 360°. Будем предполагать также, что $\alpha+\beta \geqslant 180^\circ$: в противном случае сумма двух других углов четырёхугольника $\gamma+\delta$ будет больше 180°, так что разница сведётся только к изменению обозначений.

Рассмотрим сначала случай $\alpha+\beta > 180^\circ$.

При этом построение треугольника AED возможно. Угол ADE, который однозначно определяется, обозначим буквой λ. Обозначим ещё через H точку пересечения прямых EN и AD (рис. 81). Обращаясь к вышеприведённому построению, замечаем, что шаги 1—5 всегда выполнимы. Выполнение же шага 6 зависит от некоторых дальнейших предположений. Заметим, что

$$\angle CHD = \angle HAE + \angle AEH = \alpha + \beta - 180^\circ + 180^\circ - \beta = \alpha.$$

Рассмотрим три возможных предположения.

1) $\alpha + \lambda < 180^\circ$. При этом точка H на отрезке AD (рис. 81).

Шаг 6 построения невозможен, если $\delta < \lambda$ или если $\delta > 180^\circ - \alpha$, но возможен при условии $180^\circ - \alpha > \delta \geqslant \lambda$. Но при $\delta = \lambda$ точка C совпадает с E, так что при выполнении шага 7 B совпадёт с A и никакого четырёхугольника не получится. Задача получает единственное решение при условии

$$180^\circ - \alpha > \delta > \lambda.$$

2) $\alpha + \lambda = 180^\circ$. При этом точка H совпадает с точкой D. Если $\delta \neq \lambda$, то шаг 6 вовсе не выполни́м и задача решения не

имеет. Если же $\delta = \lambda$ (см. рис. 82), то лучи HN и DK имеют бесконечно много общих точек, так что задача получает бесконечно много решений.

3) $\alpha + \lambda > 180°$.

Шаг 6 невыполним, если $\delta > \lambda$ или если $\delta \leqslant 180° - \alpha$. Если же $\delta = \lambda$, то невыполни́м шаг 7. Задача получит единственное решение при условии: $180° - \alpha < \delta < \lambda$ (см. рис. 83).

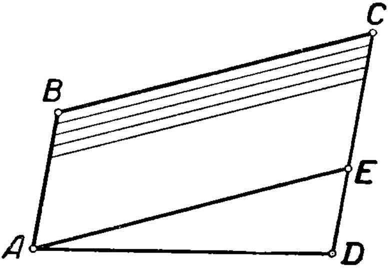

Рис. 82.

Перейдём к рассмотрению случая, когда $\alpha + \beta = 180°$. В этом случае искомый четырёхугольник — трапеция (если $a \neq b$) или параллелограмм (если $a = b$). Точка E совпадает с точкой H. Возможны три случая расположения точки E на луче AD.

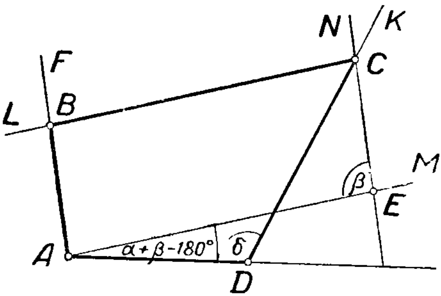

Рис. 83.

1-й случай. E — внутренняя точка отрезка AD ($a > b$). Задача имеет единственное решение, если $\alpha + \delta < 180°$ (рис. 84).

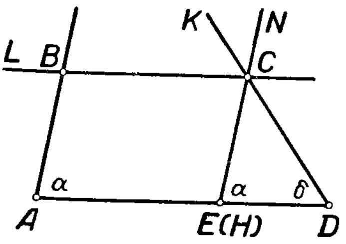

Рис. 84.

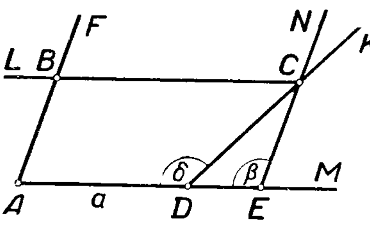

Рис. 85.

2-й случай. E совпадает с D ($a = b$). Задача имеет бесконечно много решений, если $\alpha + \delta = 180°$; если же $\alpha + \delta \neq 180°$, то задача неразрешима.

3-й случай. E на луче AD вне отрезка AD ($a < b$). Задача имеет единственное решение, если $\alpha + \delta > 180°$ (рис. 85). Если же $\alpha + \delta \leqslant 180°$, то задача неразрешима.

Итак, возможны следующие случаи.

I. $\alpha + \beta > 180°$.

1) $\alpha + \lambda < 180°$. Единственное решение, если $180° - \alpha > \delta > \lambda$.

2) $\alpha + \lambda > 180°$. „ „ $180° - \alpha < \delta < \lambda$

3) $\alpha + \lambda = 180°$. Бесконечное число решений, если $\delta = \lambda$.

II. $\alpha + \beta = 180°$.

Решение существует, если:

1) $a > b$, $\alpha + \delta < 180°$ (единственное),

либо 2) $a < b$, $\alpha + \delta > 180°$ (единственное),

либо 3) $a = b$, $\alpha + \delta = 180°$ (бесконечно много).

Пример 3. Между пунктами A и B течёт канал. Где следует выбрать место для моста, чтобы путь от A до B был кратчайшим?

Представим себе берега канала в виде двух параллельных прямых a и b (рис. 86, a), а мост — в виде отрезка MN, перпендикулярного к этим прямым.

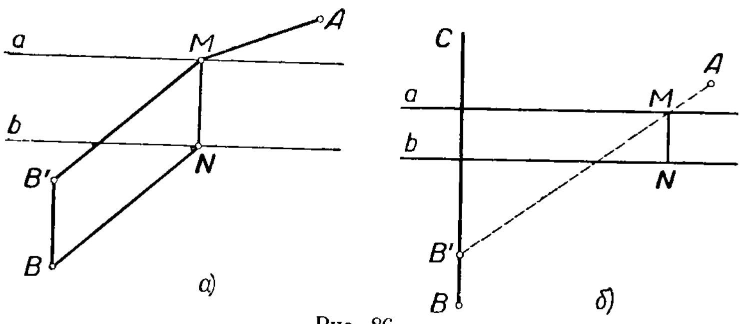

Рис. 86.

Задача заключается в том, чтобы выбрать такое положение точки M на прямой a (или точки N на прямой b), чтобы ломаная $AMNB$ имела наименьшую длину.

Так как длина отрезка MN постоянна, то условие задачи равносильно требованию, чтобы сумма отрезков AM и BN была наименьшей.

Чтобы связать отрезки AM и BN, перенесём отрезок BN на вектор $\overrightarrow{NM}$. Тогда точка N перейдёт в точку M, а точка B — в некоторую точку B', которая легко может быть построена. Так как $BN = B'M$, то нужно найти такое положение точки M, при котором ломаная $B'MA$, концы которой известны, имела бы наименьшую длину. Ясно, что это будет в случае, когда точки B', M и A расположатся на одной прямой.

Построение показано на рисунке 86, *б*. Проводим прямую BC перпендикулярно прямой a и откладываем на ней отрезок BB', равный ширине канала. Строим прямую AB'. Прямая AB' пересекает прямую a в искомой точке M.

Задача всегда имеет решение, притом единственное.

§ 3. Осевая симметрия

Две точки плоскости M и M' называются *симметричными относительно прямой* s, если они расположены на одном перпендикуляре к прямой s и прямая s делит отрезок MM' пополам.

Преобразование, при котором каждой точке данной фигуры ставится в соответствие точка, симметричная ей относительно прямой s, называется *осевой симметрией* или *отражением* в прямой s. Прямая s называется при этом *осью симметрии.*

Ясно, что осевая симметрия определяется любой парой несовпадающих соответственных точек M и M': ось пройдёт через середину отрезка MM' перпендикулярно к нему.

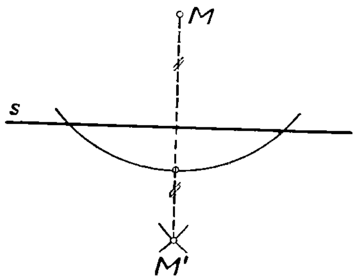

Рис. 87.

Для построения точки M', симметричной данной точке M (не лежащей на s), достаточно провести из точки M как центра какую-либо окружность, пересекающую s, а затем тем же радиусом провести из полученных точек пересечения две окружности. Точка их пересечения, отличная от M, и будет искомой точкой M' (рис. 87). Следовательно, построение симметричных точек можно осуществлять с помощью циркуля, прибегать к употреблению линейки нет надобности.

Осевая симметрия является движением. Действительно, пусть в симметрии относительно s точке A соответствует точка A', а точке B — точка B' (рис. 88). Тогда $\triangle AA_0B_0 = \triangle A'A_0B_0$ (по двум катетам), а поэтому $AB_0 = A'B_0$ и $\measuredangle A_0B_0A = \measuredangle A_0B_0A'$. Отсюда легко усмотреть, что $\measuredangle AB_0B = \measuredangle A'B_0B'$ и поэтому $\triangle AB_0B = \triangle A'B_0B'$ по

7*

двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AB = A'B'$, так что осевая симметрия преобразует каждую фигуру в равную ей фигуру.

Наше рассуждение проведено в предположении, что отрезок AB не перпендикулярен к оси симметрии. Если $AB \perp s$, то доказательство лишь упрощается.

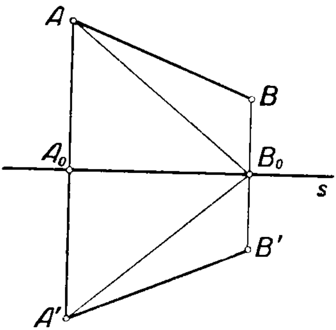

Рис. 88.

Применение осевой симметрии к решению задач на построение называют *методом симметрии*. Метод симметрии состоит в том, что наряду с данными и искомыми фигурами рассматриваются также фигуры, симметричные некоторым из них относительно некоторой оси. При удачном выборе оси и преобразуемой фигуры решение задачи может значительно облегчиться, а в иных случаях симметрия непосредственно даёт искомые точки.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Прямая MN пересекает отрезок AB. Найти на прямой MN такую точку X, чтобы прямая MN служила биссектрисой угла AXB.

Если A' — отражение точки A в прямой MN (рис. 89), то по определению $AP = A'P$ и $\measuredangle MPA = \measuredangle MPA' = 90°$.

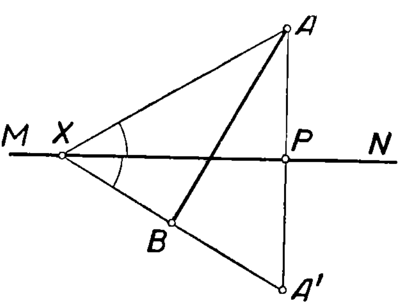

Рис. 89.

Поэтому $\triangle XPA = \triangle XPA'$ и, следовательно, $\measuredangle PXA = \measuredangle PXA'$. Таким образом, точка B должна располагаться на прямой $A'X$, иначе говоря, точка X должна располагаться на прямой $A'B$. Поэтому точка X может быть построена как пересечение прямой $A'B$ с прямой MN.

Задача имеет единственное решение, если расстояния точек A и B от прямой MN не одинаковы. Если эти расстояния одинаковы, но точки A и B не симметричны относительно прямой MN, то задача вовсе не имеет решения (так как прямая $A'B$ пойдёт параллельно MN). Наконец, если точки A и B симметричны относительно MN, то задача становится неопределённой: любая точка прямой MN удовлетворяет в этом случае условию задачи.

Пример 2. Построить треугольник, зная сторону $AC = b$, прилежащий к ней угол $A = \alpha$ и разность двух других сторон $AB - BC = r$.

Пусть ABC (рис. 90) — искомый треугольник. Величины b и α являются элементами треугольника ABC. Чтобы

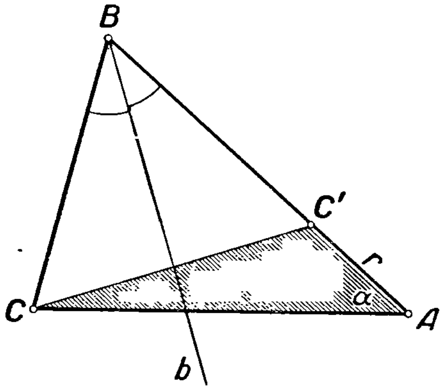

Рис. 90.

ввести в чертёж данную величину r, достаточно отразить сторону BC в биссектрисе угла B; если при этом точка C преобразуется в точку C', то точка C' окажется на стороне AB, причём отрезок $AC' = AB - BC' = AB - BC = r$. В треугольнике ACC' теперь известны две стороны и угол между ними, так что он легко может быть построен. Кроме этого, замечаем, что биссектриса угла B перпендикулярна прямой CC' и делит отрезок CC' пополам.

Итак, для построения треугольника ABC надо предварительно построить треугольник ACC' по двум сторонам и углу между ними, а затем провести прямую, перпендикулярную CC', через середину отрезка CC' до пересечения с лучом AC'; эта точка пересечения и явится третьей вершиной B искомого треугольника.

Доказательство не составляет труда.

Исследование. Заметим прежде всего, что по условию $AB > BC$ и поэтому $\measuredangle A < \measuredangle C$, следовательно, угол α должен быть острым. При этом условии симметраль точек C и C' пересечёт луч AC' в том и только в том случае, когда $\measuredangle CC'B$ острый, т. е. $\measuredangle AC'C$ тупой, так что отрезок AC' меньше проекции отрезка AC на прямую AB: $r < b\cos\alpha$.

Это неравенство не может осуществиться, если $\alpha \geqslant 90°$. Таким образом, соотношение $r < b\cos\alpha$ выражает условие (однозначной) разрешимости задачи.

Симметрией часто пользуются для решения задач, связанных со спрямлением ломаных линий, в частности задач, содержащих в качестве данных суммы или разности звеньев ломаной, а также задач на построение фигур, дающих минимальное или максимальное значение некоторой величины.

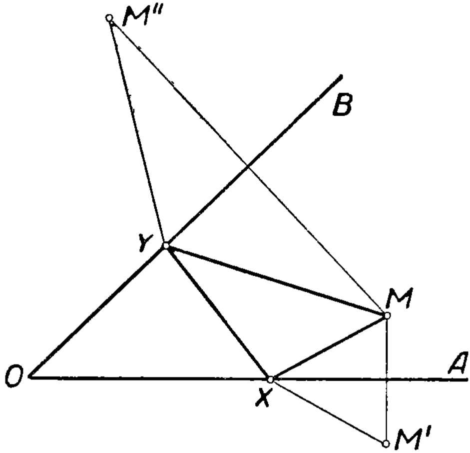

Рис. 91.

Пример 3. Дан острый угол AOB и внутри угла точка M. Найти на сторонах угла такие точки X и Y, чтобы периметр треугольника MXY был наименьшим.

Пусть X и Y (рис. 91) искомые точки. Построим отражение точки M в сторонах угла — точки M' и M''. Тогда периметр треугольника MXY равен $MX + XY + MY =$

$= M'X + XY + M''Y$, т. е. представляет собой периметр ломаной линии $M'XYM''$. Очевидно, эта величина получит наименьшее значение, когда точки M', X, Y и M'' будут лежать на одной прямой, т. е. когда точки X и Y расположатся на прямой, соединяющей точки M' и M''.

Отсюда ясно, что для определения искомых точек X и Y достаточно построить отражения M' и M'' точки M в сторонах угла AOB, соединить точки M' и M'' прямой и отметить точки X и Y пересечения этой прямой со сторонами угла (рис. 92).

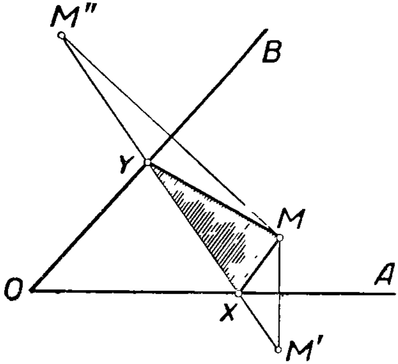

Рис. 92.

Треугольник MXY искомый.

Следующий пример иллюстрирует один употребительный приём решения задач на построение методом симметрии.

Пример 4. Построить ромб так, чтобы одна из его диагоналей была равна данному отрезку r и лежала на данной прямой a, а остальные две вершины ромба лежали соответственно на данных прямых b и c.

Анализ. Пусть (рис. 93) $ABDC$ — искомый ромб, $AD = r$.

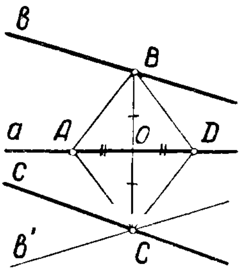

Рис. 93.

Замечаем, что задача о построении ромба сводится к построению одной какой-либо из его вершин, например вершины C. По свойствам ромба точки B и C симметричны относительно прямой a. Поэтому при зеркальном отражении в прямой a точка B преобразуется в точку C, а следовательно, прямая b — в некоторую прямую b', проходящую через точку C. Таким образом, точка C может быть построена как точка пересечения прямых c и b', из которых одна дана, а другая легко строится.

Построение. Строим последовательно: прямую b', симметричную с прямой b относительно прямой a; точку C, общую для прямых c и b'; прямую BC; точку $O \equiv BC \times a$; точки A и D на прямой a, отстоящие от точки O на расстояние $\frac{r}{2}$. $ABDC$ — искомый ромб.

Доказательство ввиду его простоты опустим.

Исследование. Возможны следующие случаи: 1) $c \parallel b'$, решений нет; 2) $c \equiv b'$, решений бесконечно много; 3) прямые c и b' пересекаются вне прямой a, одно решение; 4) прямые c и b' пересекаются на прямой a, решений нет.

Сущность приёма, применённого в последнем примере, состоит в следующем: задача сводится к построению точки, причём эта точка оказывается общей точкой некоторой данной фигуры и фигуры, симметричной другой данной фигуре относительно некоторой оси.

Аналогичный приём применяется также в задачах, решаемых при помощи других геометрических преобразований.

§ 4. Вращение около точки

Пусть в плоскости даны точка O и ориентированный угол α. Каждой точке M данной плоскости будем ставить в соответствие такую точку M', чтобы 1) $OM = OM'$; 2) $\measuredangle MOM' = \alpha$ (рис. 94). Такого рода соответствие называется *вращением* плоскости около точки O на угол α. Точка O называется *центром вращения*, угол α — *углом поворота*.

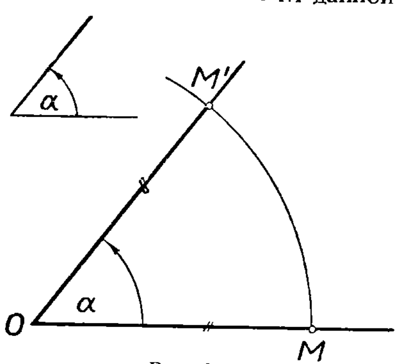

Рис. 94.

Вращение является движением. В самом деле, если O — центр вращения, α — угол поворота, AA' и BB' — две пары соответственных точек, то, по определению, $OA = OA'$, $OB = OB'$. Кроме того (рис. 95),

$$\measuredangle A'OB' = \alpha - \measuredangle BOA' = \measuredangle AOA' - \measuredangle BOA' = \measuredangle AOB.$$

Поэтому $\triangle A'OB' = \triangle AOB$ и, следовательно, $A'B' = AB$.

Таким образом, вращение переводит всякую фигуру в равную ей фигуру.

Чтобы построить образ некоторой прямой, достаточно избрать на ней какие-либо две точки, построить их образы и соединить их прямой.

Можно также опустить из центра вращения перпендикуляр OP на данную прямую p, осуществить его поворот на данный угол и провести затем через точку P' (в которую перейдёт точка P) прямую p', перпендикулярную к OP' (рис. 96).

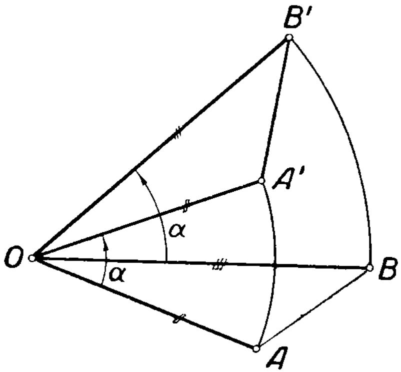

Рис. 95.

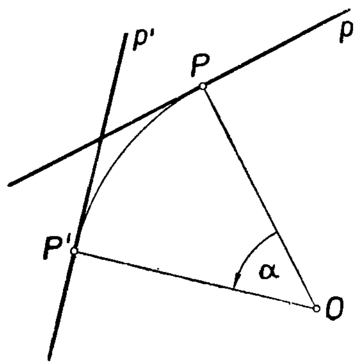

Рис. 96.

Чтобы построить образ окружности, надо построить образ её центра и, приняв его за центр, провести окружность тем же радиусом.

Построение образа данного многоугольника сводится к повороту его вершин.

Помимо задания вращения посредством центра вращения и угла поворота, следует отметить способ его задания двумя парами соответственных точек. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если два отрезка AB и $A'B'$ равны, а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ не равны, то существует вращение, переводящее точку A в точку A' и точку B — в точку B' (следовательно, отрезок AB — в отрезок $A'B'$).

Доказательство. Будем предполагать сначала, что $A \neq A'$, $B \neq B'$, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, так что прямые AB и $A'B'$ пересекаются.

Будем искать центр вращения как точку, равноудалённую от A и A' и в то же время равноудалённую от B и B'. Такая точка должна быть общей для симметрали a точек A и A' и симметралн b точек B и B'. Могут представиться два случая.

1) Прямые AA' и BB' пересекаются (рис. 97). Тогда прямые a и b тоже пересекаются. Пусть $a \times b \equiv O$. Тогда $OA = OA'$, $OB = OB'$.

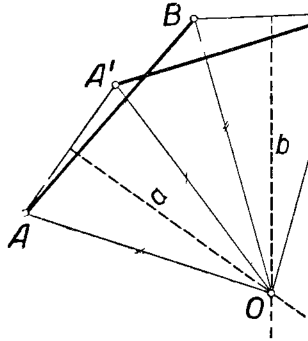

Рис. 97.

Нетрудно убедиться, что $\sphericalangle AOA' = \sphericalangle BOB'$. В самом деле, $\triangle OAB = \triangle OA'B'$ по трём сторонам. Отсюда следует, что $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'$, а так как $\sphericalangle AOA' = \sphericalangle AOB - \sphericalangle A'OB$ и $\sphericalangle BOB' = \sphericalangle A'OB' - \sphericalangle A'OB$, то $\sphericalangle AOA' = \sphericalangle BOB'$.

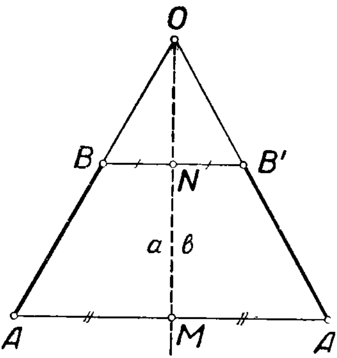

Рис. 98а.

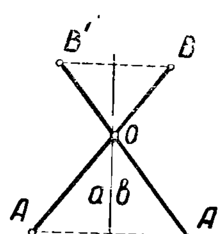

Рис. 98б.

После этого ясно, что при повороте около точки O на $\sphericalangle AOA'$ отрезок AB займёт положение $A'B'$.

2) $AA' \parallel BB'$ (рис. 98 а и 98 б).

Пусть $AB \times A'B' = O$. Ясно, что $\sphericalangle OAA' = \sphericalangle OBB'$, $\sphericalangle OA'A = \sphericalangle OB'B$. Поэтому

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{BO}{B'O} = \frac{AO \pm BO}{A'O \pm B'O} = \frac{AB}{A'B'} = 1.$$

Таким образом, $AO = A'O$, $BO = B'O$, так что треугольники AOA' и BOB' — равнобедренные. Но тогда прямые a и b проходят че-

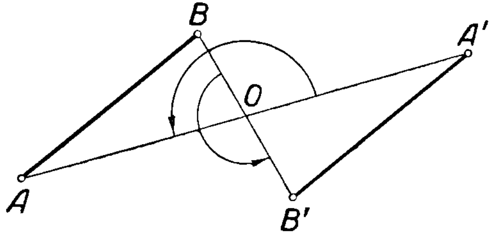

Рис. 99а.

рез O, и так как $a \perp AA'$, $b \perp BB'$ и $AA' \parallel BB'$, то $a \equiv b$. Очевидно также, что $\sphericalangle AOA' = \sphericalangle BOB'$. Поэтому при повороте вокруг точки O на угол AOA' точка A перейдёт в точку A', а точка B — в точку B', ч. т. д.

Обратимся теперь к нерассмотренным нами случаям. Если $A \equiv A'$, то при повороте вокруг A на угол BAB' отрезок AB преобразуется в отрезок $A'B'$. Аналогично будет, если $B \equiv B'$.

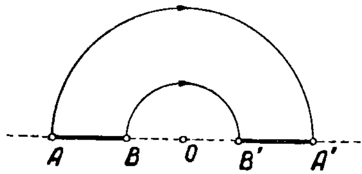

Рис. 99б.

Если $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$ (рис. 99а и 99б), то доказательство лишь упрощается: при повороте на 180° около середины O отрезка AA' $AB \to A'B'$. Доказательство опустим.

Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, то вращения, переводящего одновременно A в A' и B в B', нет. В этом случае существует параллельный перенос, осуществляющий такое преобразование.

Итак, любое движение отрезка в плоскости можно осуществить посредством вращения или параллельного переноса.

Вращением пользуются как методом решения геометрических задач на построение. Идея метода вращения состоит в том, чтобы повернуть какую-либо данную или искомую фигуру около целесообразно избранного центра на соответствующий угол так, чтобы облегчить проведение анализа задачи или даже непосредственно прийти к решению. Поясним этот приём несколькими примерами.

Пример 1. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

Пусть ABC (рис. 100) — искомый треугольнике, a и b — данные его стороны, $CD = m_c$ — данная медиана.

Повернув всю фигуру около точки D на $180°$, получим параллелограмм $ACBC'$, у которого известны стороны и одна из диагоналей $CC' = 2m_c$. Это подсказывает следующий ход построения: строится (по трём сторонам) треугольник ACC' и дополняется до параллелограмма $ACBC'$; соединив точки A и B, получим искомый треугольник ABC.

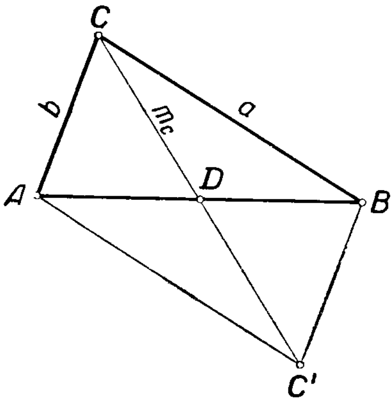

Рис. 100.

Построение треугольника ACC', а следовательно и искомого треугольника, возможно при условии $|a-b| < 2m_c < a+b$.

При наличии этих условий решение единственное.

Пример 2. Даны: точка O и прямые a и b, не проходящие через неё. Из точки O, как из центра, провести такую окружность, чтобы дуга её, заключённая между данными прямыми, была видна из точки O под данным острым углом α.

Анализ. Допустим, что задача решена, ω — искомая окружность, A и B — концы дуги, заключённой между

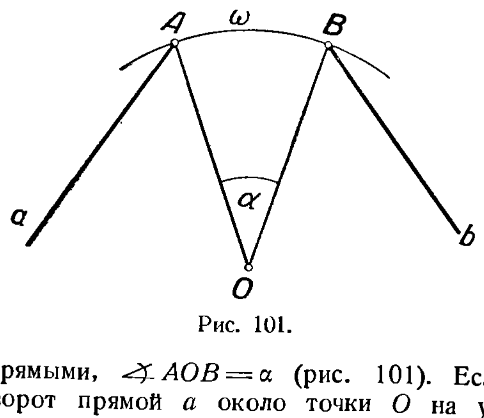

Рис. 101.

данными прямыми, $\measuredangle AOB = \alpha$ (рис. 101). Если осуществить поворот прямой a около точки O на угол α, то точка A попадёт в точку B. Следовательно, точка B может быть найдена как пересечение образа прямой a с прямой b. После этого легко строится искомая окружность.

Построение. Повернём прямую a около точки O на угол α. Пусть она займёт после поворота положение a' (рис. 102). Строим общую точку B прямых a' и b. Окружность ω (O, OB) искомая.

Доказательство. Допустим ради определённости, что при построении поворот прямой a производился в направлении движения часовой стрелки. Повернём точку B около центра O на угол α в направлении, обратном направлению движения часовой стрелки. Тогда прямая a' займёт положение a, а точка B займёт некоторое положение A

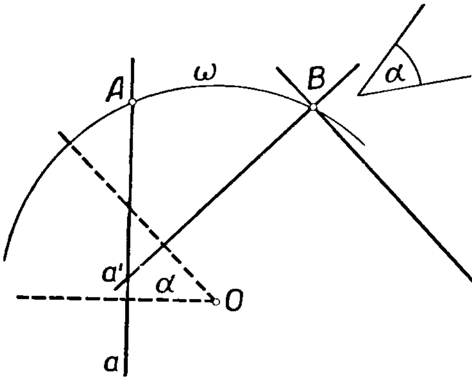

Рис. 102.

на прямой a. Ясно, что $\measuredangle AOB = \alpha$, и поэтому окружность ω действительно удовлетворяет условию задачи.

Исследование. Так как условием задачи направление вращения не предусмотрено, то прямую a можно повернуть около точки O на угол α как по часовой стрелке, так и в противоположном направлении. Поэтому прямая может занять после поворота два различных положения: a' и a''. Так как угол α, по условию, острый, то a' не параллельна a'' (угол между ними 2α). Возможны следующие случаи: 1) a' и a'' пересекают b; задача имеет два решения; 2) a' (или a'') параллельна b; одно решение; 3) a' (или a'') совпадает с b; решений бесконечно много.

Пример 3. Построить квадрат так, чтобы три его вершины лежали на трёх данных параллельных прямых a, b и c.

Пусть $PQRS$ — искомый квадрат (рис. 103), причём $P \in a$, $Q \in b$, $R \in c$. При повороте вокруг точки Q на 90°

точка R совпадёт с P, а прямая c преобразуется в прямую c', проходящую через P, так что $P \equiv a \times c'$. Построив отрезок PQ (сторону квадрата), легко построим затем и весь квадрат.

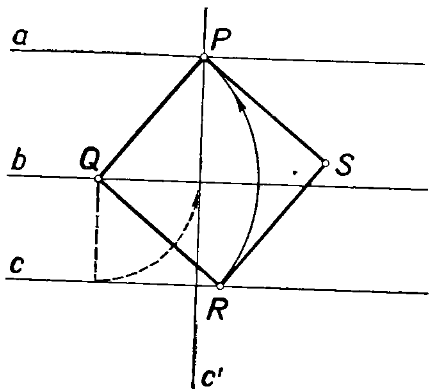

Рис. 103.

Выбирая точку Q на различных прямых, получим три неравных квадрата (рис. 104). Исключение составляет тот

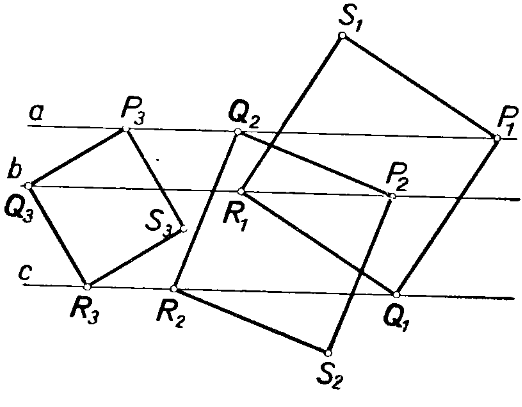

Рис. 104.

случай, когда одна из данных прямых равноудалена от двух других: в этом случае квадраты $P_1Q_1R_1S_1$ и $P_2Q_2R_2S_2$ рисунка 104 оказываются равными.

Эта задача имеет бесконечно много решений, которые можно получить, меняя положение точки Q на прямых a, b, c. Каждый из квадратов, которые могут быть получены таким путём, будет равен одному из квадратов $P_1Q_1R_1S_1$, $P_2Q_2R_2S_2$ и $P_3Q_3R_3S_3$.

Вращение на 180° часто рассматривают как особый вид преобразования. Если O — центр вращения, то каждая точка M плоскости преобразуется при этом в такую точку M', что точки M и M' располагаются на прямой, проходящей через точку O, и находятся по разные стороны от точки O

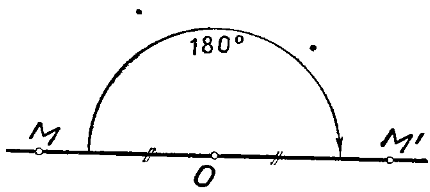

Рис. 105.

на одинаковых от неё расстояниях (рис. 105). Такое преобразование называется *центральной симметрией* относительно точки O. Ясно, что центральная симметрия определяется заданием центра или одной пары соответственных точек.

Пример 4. Земельный участок квадратной формы был огорожен. От изгороди сохранились два столба на параллельных сторонах квадрата. Кроме того, остался столб в центре квадрата. Требуется восстановить границу участка.

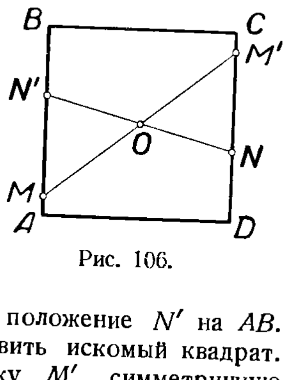

Рис. 106.

Анализ. Пусть $ABCD$ — искомый квадрат, O — его центр, M и N — данные точки соответственно на сторонах AB и CD (рис. 106).

Если повернуть квадрат на 180° около его центра O, то точка M займёт некоторое положение M' на стороне CD, а точка N — некоторое положение N' на AB. После этого нетрудно уже восстановить искомый квадрат.

Построение. 1) Строим точку M', симметричную M относительно O, и точку N', симметричную N относительно O. 2) Строим прямые MN' и NM'. 3) Повернём построенные прямые около точки O на 90°. Четыре построенные прямые ограничивают искомый квадрат.

Доказательство опускаем.

Исследование. По смыслу задачи невозможен случай, когда точки M и N располагаются с точкой O на одной прямой, но не симметричны относительно O. Если точки M и N симметричны относительно O, то задача становится неопределённой. В остальных случаях задача имеет единственное решение.

§ 5. Замечание о решении неопределённых задач

Понятие о геометрических преобразованиях подсказывает новый целесообразный подход к вопросу о полном решении неопределённой задачи на построение (см. § 4, гл. I).

Во многих случаях удаётся указать одно или несколько решений неопределённой задачи, из которых все остальные её решения могут быть получены с помощью тех или иных геометрических преобразований. В этих случаях полученное решение задачи естественно считать полным „с точностью до преобразований", которые должны быть соответствующим образом определены.

Пример 1. Построить окружность, касающуюся двух данных параллельных прямых a и b (рис. 107).

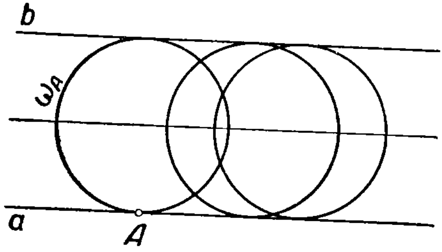

Рис. 107.

Избирая в качестве точки касания произвольную точку A на прямой a, мы получаем конкретное решение поставленной задачи — окружность ω_A. Если дополнить это решение указанием, что все остальные решения могут быть получены из ω_A путём переноса на произвольный вектор, носитель которого параллелен данным прямым, то можно считать, что задача получила полное решение. В данном случае естественно считать, что задача имеет единственное решение „с точностью до переноса".

Пример 2. Построить окружность данного радиуса r, касающуюся данной окружности радиуса R ($r \neq R$).

Рассуждая аналогично предыдущему, мы найдём, что задача имеет два решения „с точностью до поворота" на произвольный угол около центра данной окружности (см. рис. 108).

Пример 3. Задача 4 из § 4 имеет бесконечное множество решений. С точностью до переноса по направлению данных прямых

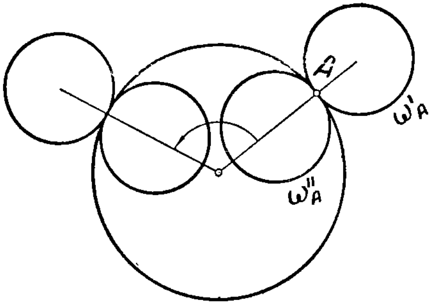

Рис. 108.

и до отражений в прямых, перпендукулярных данным, будем считать, однако, что различных решений три.

§ 6. Понятие о группе преобразований

Пусть на плоскости задано некоторое движение D. Если точка M' — образ точки M в этом движении, то будем записывать это символом: $D(M) = M'$.

Пусть заданы два движения: D_1 и D_2 и пусть M — произвольная точка плоскости. Пусть $D_1(M) = M'$ и $D_2(M') = M''$. Таким путём возникает новое преобразование: $M \to M''$, которое является результатом последовательного выполнения двух данных движений D_1 и D_2. Будем называть это новое преобразование *произведением* данных движений и обозначать символом $D = D_2D_1$.

Если $D_1(A) = A'$, $D_2(A') = A''$, $D_1(B) = B'$, $D_2(B') = B''$, то по определению $D(A) = A''$, $D(B) = B''$. И так как $AB = A'B'$ и $A'B' = A''B''$, то $AB = A''B''$. Следовательно, *произведение двух движений есть движение.*

Пусть заданы три движения D_1, D_2, D_3 и некоторая точка M, причём $D_1(M) = M'$, $D_2(M') = M''$, $D_3(M'') = M'''$.

Тогда $D_2(D_1(M)) = D_2(M') = M''$, $D_3(M'') = M'''$, так что $D_3(D_2(D_1(M))) = M'''$. С другой стороны, $D_1(M) = M'$, $D_3D_2(M') = D_3(M'') = M'''$, так что $D_3D_2(D_1(M)) = M'''$. Следовательно, для любой точки M $D_3(D_2D_1(M)) = D_3D_2(D_1(M))$, т. е. преобразования $D_3 \cdot (D_2D_1)$ и $D_3D_2 \cdot (D_1)$ переводят каждую точку плоскости в одну и ту же точку. Это свойство движений записывают так:

$$D_3(D_2D_1) = (D_3D_2)D_1$$

и называют сочетательным (или ассоциативным) свойством движений.

Пусть D — какое-либо заданное движение и пусть $D(M) = M'$, где M — любая точка плоскости. Так как движение D есть 1—1 преобразование, то можно определить обратное ему преобразование D^{-1} так, чтобы $D^{-1}(M') = M$ (см. стр. 92). Если $D(N) = N'$, то $D^{-1}(N') = N$. При этом $MN = M'N'$ или, что то же, $M'N' = MN$, а это означает, что преобразование D^{-1} также есть движение. Итак, для каждого движения существует обратное ему преобразование, которое также есть движение. Произведение $D^{-1}D$ или DD^{-1} будет переводить каждую точку плоскости в себя:

$$D^{-1}D(M) = D^{-1}(M') = M.$$

Это — тождественное преобразование, которое иногда называют „единичным преобразованием" и обозначают символом E.

Приведённые рассуждения показывают, что движения на плоскости образуют группу: они обладают всеми групповыми свойствами, если в качестве групповой операции над двумя движениями принять последовательное их выполнение.

Нетрудно убедиться в том, что движения некоторых определённых видов, например всевозможные параллельные переносы или всевозможные вращения около некоторого определённого центра, образуют, в свою очередь, группу. Каждая из этих групп служит, понятно, подгруппой группы движений.

Помимо группы движений, в геометрии рассматриваются также различные другие группы преобразований, причём умножение преобразований всегда определяется как последовательное их осуществление.

Сочетательное свойство имеет место для любых геометрических преобразований: рассуждения, приведённые выше для доказательства сочетательности движений, дословно переносятся на любые преобразования. Поэтому, для того чтобы некоторая совокупность S геометрических преобразований была группой (относительно „геометрического" умножения), необходимо и достаточно, чтобы: 1) произведение любых двух преобразований этой совокупности принадлежало той же совокупности (свойство „замкнутости"); 2) для каждого преобразования, произвольно избранного из совокупности S, к этой же совокупности принадлежало обратное преобразование.

Ясно, что каждая группа преобразований содержит тождественное преобразование, которое играет роль групповой единицы.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что называется точечным преобразованием плоскости?
2. Приведите примеры точечных преобразований плоскости.
3. Во что преобразуется какая-либо прямая плоскости, если подвергнуть эту плоскость преобразованиям, перечисленным в примерах 1—4 параграфа 1?
4. Какое преобразование плоскости называется взаимно однозначным?
5. Назовите известные вам взаимно однозначные преобразования плоскости.
6. Что называется в геометрии движением на плоскости?
7. Чем определяется параллельный перенос?
8. Построить образ данного треугольника в данном параллельном переносе.

9. Как может быть задана осевая симметрия?

10. Построить образ данной прямой в осевой симметрии, заданной двумя точками.

11. Как осуществить поворот точки на данный угол около данного центра, пользуясь циркулем и линейкой?

12. Как построить образ данной точки, если вращение задано двумя соответственными отрезками?

13. В чём состоит преобразование центральной симметрии?

ЗАДАЧИ

1. Построить трапецию по основаниям и диагоналям.

2. Построить трапецию по стороне, диагоналям и углу между диагоналями.

3. Построить треугольник по трём его медианам.

4. Даны две точки A и B по разные стороны от данной прямой a. Отложить на прямой a отрезок MN, равный данному отрезку l, так, чтобы длина ломаной $AMNB$ была наименьшей.

5. Из трёх данных прямых две параллельны, а третья их пересекает. Построить равносторонний треугольник с вершинами на этих прямых и стороной, равной данному отрезку a.

6. Через данную точку провести прямую так, чтобы отрезок её, заключённый между двумя данными параллельными прямыми, был равен данному отрезку.

7. Между сторонами данного угла поместить отрезок, равный данному отрезку l, так, чтобы он был параллелен данной прямой, пересекающей обе стороны данного угла.

8. Между двумя параллельными прямыми дана точка. Провести окружность, проходящую через эту точку и касательную к данным прямым. (Решить методом переноса.)

9. Между сторонами данного угла поместить отрезок, равный данному, так, чтобы он отсекал от сторон угла равные отрезки. (Решить методом переноса.)

10. Построить параллелограм, основанием которого служит данный отрезок, а две другие его вершины лежат на двух данных окружностях.

11. Провести параллельно данной прямой a секущую к двум данным окружностям так, чтобы сумма (или разность) образуемых ею хорд была равна данному отрезку.

12. Построить четырёхугольник по трём сторонам и двум углам, прилежащим к неизвестной стороне.

13. Построить четырёхугольник, зная четыре его стороны и угол между двумя противоположными его сторонами.

14. Построить четырёхугольник по диагоналям, углу между ними и двум смежным (или несмежным) его сторонам.

15. На боковых сторонах AB и AC треугольника ABC найти соответственно такие точки X и Y, чтобы прямая XY была параллельна прямой BC и чтобы выполнялось соотношение $BX = AY$.

16. Между пунктами A и B расположены два канала. Где выбрать места для мостов через эти каналы, чтобы путь из A в B через эти мосты был кратчайшим? (Предполагается, что берега каждого канала — параллельные прямые и что мосты должны быть перпендикулярны берегам.)

17. Повернуть вокруг данной точки M на данный угол α в указанном направлении:

а) данную окружность;

б) данный квадрат.

18. Построить равносторонний треугольник, имеющий одной своей вершиной данную точку A, а две другие вершины — на данных параллельных прямых.

19. Из данной точки P, как из центра, описать дугу окружности так, чтобы концы её лежали на данных двух окружностях, а градусная мера её была равна градусной мере данного угла.

20. Через данную точку P провести прямую так, чтобы отрезок её, заключенный между двумя данными окружностями, делился этой точкой пополам.

21. В данный параллелограм вписать квадрат.

22. В данный квадрат вписать равносторонний треугольник.

23. Построить треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

24. Найти на двух данных прямых a и b две точки, симметричные относительно третьей данной прямой c.

25. Даны две окружности. Найти на данной прямой AB такую точку X, чтобы касательные, проведённые из этой точки к данным окружностям, были наклонены к AB под равными углами.

26. Построить четырёхугольник $ABCD$ по четырём его сторонам, если известно, что его диагональ AC делит угол A пополам.

27. Построить треугольник по высоте, разности отрезков, на которые она делит основание, и разности углов, прилежащих к основанию.

28. Даны $\triangle ABC$ и точка M внутри него. Построить равнобедренный треугольник с вершиной в точке M так, чтобы его основание было параллельно стороне AB и концы основания находились на прямых AC и BC.

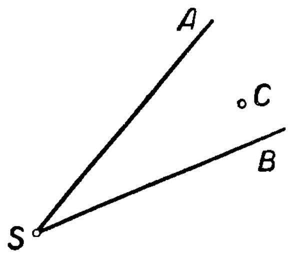

Рис. 109.

29. Дана прямая a и две точки A и B по разные стороны от неё. Найти на данной прямой a такую точку C, чтобы разность её расстояний от двух данных точек A и B была наибольшей.

30. Дорога SA (см. рис. 109) пересекает реку SB под острым углом. Гонец из сторожевого пункта C должен по возможности скорее добраться до дороги SA (чтобы с попутной машиной передать письмо), но при этом ему нужно по пути напоить коня в реке SB. Как он должен ехать?

31. Построить ромб так, чтобы одна его диагональ была равна данному отрезку a и лежала на данной прямой и чтобы другие две вершины ромба лежали соответственно на двух данных окружностях.

32. На основании данного равнобедренного треугольника ABC найти точку, разность расстояний которой до боковых сторон равна данному отрезку.

33. Даны две окружности и прямая между ними. Построить равносторонний треугольник так, чтобы две его вершины были на окружностях, а одна из высот лежала на данной прямой.

34. Даны точки A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой a. Расположить на этой прямой отрезок XY, равный данному отрезку l, так, чтобы ломаная $AXYB$ была наименьшей длины.

35. На биллиардном столе в двух точках A и B находились два шара. После удара в шар A, он, отразившись от n последовательных бортов, попал в шар B. Построить ломаную, которую при этом описал шар A. (Решить задачу отдельно при $n = 1, 2, 3, 4$.)

Глава IV

ГОМОТЕТИЯ

§ 1. Определение гомотетии

Пусть на плоскости задана некоторая точка S и, кроме того, задано действительное число k, неравное нулю.

Гомотетией * (или перспективно-подобным преобразованием, или центрально-подобным преобразованием) с *центром* в точке S и *коэффициентом* k называется такое преобразование фигуры, при котором:

1. Каждой отличной от S точке P этой фигуры сопоставляется такая точка P', что:

а) точки S, P и P' лежат на одной прямой;

б) длина отрезка SP' в $|k|$ раз больше длины отрезка SP, т. е. $SP' = |k| \cdot SP$;

в) отрезки SP и SP' одинаково направлены, если $k > 0$, и противоположно направлены, если $k < 0$.

2. Точке S сопоставляется эта же точка.

Пользуясь векторными обозначениями, условия, определяющие гомотетию, можно объединить в одно, а именно: $\overrightarrow{SP'} = k \cdot \overrightarrow{SP}$. Гомотетию с центром S и коэффициентом k будем обозначать так: $\Gamma\{S,\ k\}$.

На рисунке 110 изображены несколько точек $A, B, C, \ldots$ и их образы соответственно $A', B', C' \ldots$ в гомотетии с центром S и коэффициентом $k = 3$. Здесь $SA' : SA = SB' : SB = SC' : SC = 3$.

Если в некоторой гомотетии точке P ставится в соответствие точка P', то говорят, что точка P' *гомотетична* точке P. Аналогично, если некоторая гомотетия преобразует

---

* От греч. ὅμοσ — подобный, θετόσ — расположенный.

какую-либо фигуру Ф в фигуру Ф′, то фигуру Ф′ называют гомотетичной фигуре Ф.

Ясно, что если гомотетия $\Gamma\{S, k\}$ преобразует фигуру Ф в фигуру Ф′, то гомотетия $\Gamma^{-1}\left\{S, \frac{1}{k}\right\}$ преобразует фигуру Ф′ в фигуру Ф.

Рассмотрим некоторые частные примеры гомотетии.

1. $k = 1$. В этом случае $\overrightarrow{SP'} = \overrightarrow{SP}$, т. е. точка P' совпадает с точкой P (при любом выборе P). Иными словами, каждая точка плоскости преобразуется в себя. Таким образом, при $k = 1$ гомотетия представляет собой *тождественное преобразование* плоскости.

2. $k = -1$. $\overrightarrow{SP'} = -\overrightarrow{SP}$. Точка P' симметрична точке P относительно центра гомотетии. В этом случае гомотетия является *симметрией* относительно точки S.

Наглядно можно представить себе гомотетию при $k > 1$ как *растяжение* плоскости от точки S, а при $0 < k < 1$ — как *сжатие* плоскости к центру гомотетии.

Гомотетия называется *прямой* при $k > 0$ и *обратной* при $k < 0$.

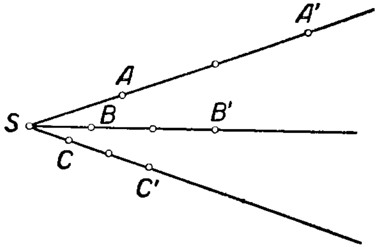

Рис. 110.

В случае прямой гомотетии точка и её образ располагаются по одну сторону от центра, в случае обратной гомотетии — по разные стороны.

Если существует гомотетия, преобразующая данную фигуру Ф в некоторую другую данную фигуру Ф′, то эти фигуры называют иногда *перспективно-подобными* или *подобными* и *подобно-расположенными*, а центр гомотетии называется *центром подобия* этих фигур. В случае, когда каждая точка фигуры Ф и соответственная ей точка фигуры Ф′ располагаются по одну сторону от центра подобия (гомотетия прямая), центр подобия называется *внешним*. Если же соответственные точки перспективно-подобных фигур располагаются по разные стороны от центра подобия (гомотетия обратная), то центр подобия называется *внутренним*.

На рисунке 111 S—внешний центр подобия фигур Ф и Ф′.

На рисунке 112 S — внутренний центр подобия фигур Ф и Ф′.

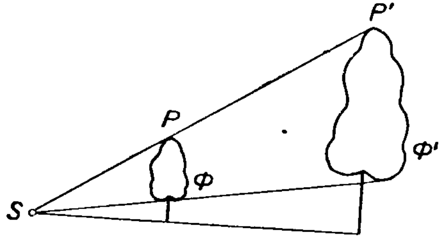

Рис. 111.

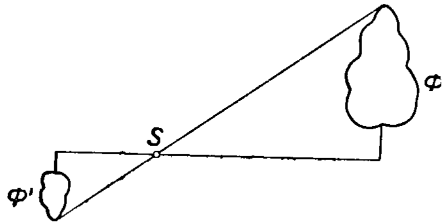

Рис. 112.

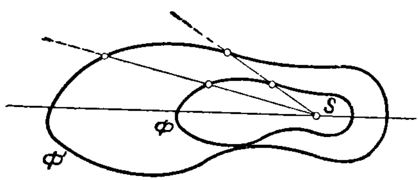

Рис. 113.

Не следует думать, что внешний центр подобия двух фигур всегда располагается вне этих фигур. На рисунке 113 показано преобразование фигуры Ф в фигуру Ф′ в прямой гомотетии, точка S служит внешним центром подобия этих фигур, $k = 2$.

§ 2. Основные свойства гомотетии

1. *Гомотетия является взаимно однозначным преобразованием.*

В самом деле, для каждой точки P' существует на прямой SP' единственная точка P, такая, что $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{k}\overrightarrow{SP'}$, т. е.

$\overrightarrow{SP'} = k \cdot \overrightarrow{SP}$. Иными словами, для каждой точки P' существует единственный прообраз.

2. *Всякая прямая, проходящая через центр гомотетии, преобразуется в себя*; это вытекает из определения гомотетии и свойства 1.

3. *Луч, исходящий из центра гомотетии, преобразуется:*

а) *в себя, если гомотетия прямая;*

б) *в луч, симметричный рассматриваемому относительно центра гомотетии, если гомотетия обратная.*

4. *Отрезок, соединяющий две произвольные точки плоскости*, не лежащие на одной прямой с центром гомотетии, *и отрезок, соединяющий образы этих точек, параллельны* (при $k=1$ сливаются), *причём отношение длины второго к длине первого равно абсолютной величине коэффициента гомотетии.*

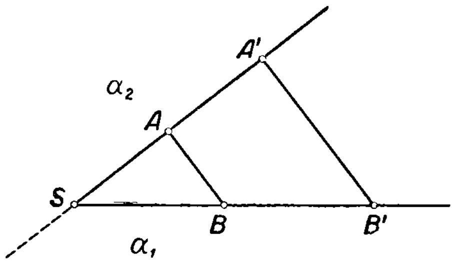

Рис. 114.

Доказательство. Пусть точкам A и B (рис. 114 сопоставлены соответственно точки A' и B'. Тогда $SA' = |k| \cdot SA$ и $SB' = |k| \cdot SB$, откуда следует, что $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB}$, так что прямые AB и $A'B'$ отсекают на сторонах угла ASB пропорциональные отрезки. Отсюда ясно, что, во-первых, $AB \| A'B'$ и, во-вторых, $A'B' = |k| \cdot AB$.

Замечание. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ направлены одинаково, если гомотетия прямая, и противоположно направлены, если гомотетия обратная.

Действительно, прямая AA' делит плоскость на две полуплоскости α_1 и α_2. Луч SB принадлежит одной из этих полуплоскостей, скажем α_1. Если гомотетия прямая (рис. 114), то точка B' принадлежит тому же лучу и, следовательно, той же полуплоскости α_1. Это означает, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ лежат по одну сторону от прямой AA', соединяющей их начала, так что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ одинаково направлены.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что в случае обратной гомотетии векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ имеют противоположные направления (рис. 115).

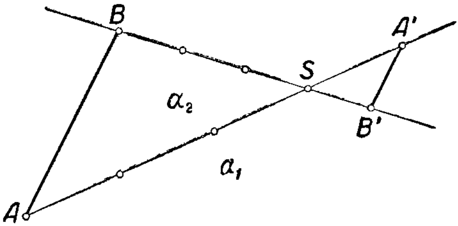

Рис. 115.

5. *Всякая прямая, не проходящая через центр гомотетии, преобразуется в параллельную ей прямую* (если $k \neq 1$).

Доказательство. Пусть a (рис. 116) — какая-либо прямая, не проходящая через центр гомотетии S, A и B — какие-либо две точки на прямой a, A' и B' — гомотетичные им точки. Прямую $A'B'$ обозначим через a'.

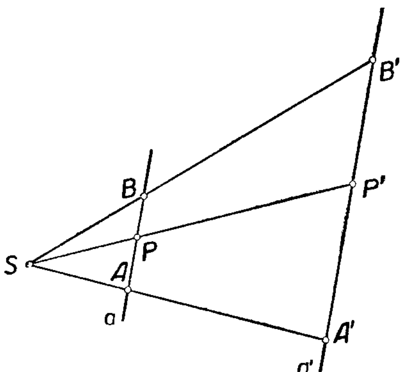

Рис. 116.

Если P — любая точка прямой a и P' — её образ, то по свойству 4 $A'B' \parallel AB$ и $A'P' \parallel AP$, т. е. прямые $A'B'$ и $A'P'$ проходят через точку A' параллельно одной и той же прямой. Значит, они сливаются, так что точка P' располагается на прямой a'. Итак, всякая точка прямой a преобразуется в некоторую точку прямой a'.

Обратно: пусть P' (тот же рисунок) — какая-либо точка прямой a. Прямая $P'S$, пересекая прямую a', пересечёт и параллельную ей прямую a в некоторой точке P. Легко усмотреть, что именно эта точка P преобразуется в данную точку P'. Из подобия треугольников $SA'P'$ и SAP видно, что $SP' : SP = SA' : SA = |k|$, и, кроме того, ясно, что точки P и P' располагаются по одну сторону от S в случае прямой гомотетии и по разные стороны от S в случае обратной гомотетии. Таким образом, каждая точка прямой a' служит образом некоторой точки прямой a.

6. *При гомотетии параллельные прямые преобразуются в параллельные же прямые.*

Действительно, пусть прямая a параллельна прямой b и некоторая гомотетия преобразует эти прямые соответственно в прямые a' и b'. Тогда прямые a' и b' не могут иметь общих точек, так как прообраз общей точки лежал бы как на прямой a, так и на прямой b, а эти прямые, по условию, общих точек не имеют.

Это свойство может быть выведено также из свойства 5.

7. *При гомотетии отрезок преобразуется в отрезок.*

Пусть AB — какой-либо отрезок, A' и B' — точки, соответственно гомотетичные точкам A и B. Пусть P — произвольная точка отрезка AB, P' — гомотетичная ей точка. По условию $AP + PB = AB$. Следовательно, в силу свойства **4**, $A'P' + P'B' = |k| \cdot AP + |k| \cdot PB = |k| \cdot (AP + PB) = |k| \times \times AB = A'B'$, т. е. $A'P' + P'B' = A'B'$, а это возможно лишь тогда, когда точка P' располагается на отрезке $A'B'$ (в противном случае $A'P' + P'B' > A'B'$). Таким образом, каждая точка отрезка AB преобразуется в точку отрезка $A'B'$. Аналогично доказывается и обратное: каждая точка отрезка $A'B'$ гомотетична некоторой точке отрезка AB.

Следующие два свойства вытекают из определений и доказанных свойств.

8. *При гомотетии луч переходит в луч*, причём луч и его образ направлены одинаково в случае прямой гомотетии и противоположно в случае обратной гомотетии.

9. *При гомотетии угол преобразуется в равный ему угол.*

10. *При гомотетии треугольник преобразуется в подобный ему треугольник.*

Пусть вершины треугольника ABC преобразуются соответственно в точки A', B' и C'. Тогда, в силу свойства **7**, стороны треугольника ABC преобразуются соответственно в стороны треугольника $A'B'C'$, причём $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'B'}{CB} = \frac{A'C'}{AC} = |k|$. Следовательно, $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

11. *При гомотетии многоугольник преобразуется в подобный ему многоугольник.*

12. *Если какая-либо точка делит некоторый отрезок в определённом отношении, то гомотетичная ей точка делит образ этого отрезка в том же отношении.*

Пусть AB — данный отрезок и P — точка на прямой AB. Обозначая через A', B' и P' точки, соответственно гомотетичные точкам A, B и P, найдём по свойству **4**: $A'P' = |k| \cdot AP$, $B'P' = |k| \cdot BP$, откуда следует $A'P' : B'P' = AP : BP$, что и требовалось доказать.

13. *При гомотетии высота, медиана и биссектриса данного треугольника переходят соответственно в высоту, медиану и биссектрису гомотетичного треугольника* (см. свойства 9 и 12).

Обобщением понятия гомотетии является понятие об общем преобразовании подобия. Преобразование плоскости называется *преобразованием подобия* с коэффициентом подобия k, если при любом выборе двух точек плоскости отношение расстояний между образами этих точек к расстоянию между самими точками равно k. Две фигуры называются *подобными*, если существует преобразование подобия, переводящее одну из этих фигур в другую. Ясно, что всякое движение или гомотетия представляют частные случаи преобразования подобия. Ясно также, что последовательное применение гомотетии и движения приводит к преобразованию подобия. С другой стороны, можно доказать, что этим понятие о подобии исчерпывается, а именно, всякое преобразование подобия можно рассматривать как результат последовательного применения некоторого движения и некоторой гомотетии, т. е. если имеются две подобные фигуры, то всегда можно переместить одну из них по плоскости так, чтобы эти фигуры стали перспективно-подобными (об этом см., например [9], п. 176 или [20], теоремы 146 и 147).

§ 3. Гомотетия окружностей

Теорема 1. *При гомотетии всякая окружность ω преобразуется в некоторую окружность ω', причём центр окружности ω преобразуется в центр окружности ω', а отношение радиуса окружности ω' к радиусу окружности ω равно абсолютной величине коэффициента гомотетии.*

Доказательство. Пусть $\omega(O, R)$ — данная окружность, P — произвольная её точка, O' и P' — точки, гомотетичные соответственно точкам O и P. Тогда по свойству **4**, § 2 $O'P' = |k| \cdot OP$, т. е. $O'P' = |k| \cdot R$. Итак, точка P', гомотетичная произвольной точке P данной окружности ω, лежит на окружности $\omega'(O', R')$, причём $R' = k \cdot R$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что и обратно: каждая точка P' окружности ω' гомотетична некоторой точке окружности ω.

Теорема 2. *Всякие две неравные окружности перспективно-подобны и обладают внешним и внутренним центрами подобия.*

Доказательство. Пусть даны две окружности $\omega_1(O_1, R_1)$ и $\omega_2(O_2, R_2)$, причём $R_2 > R_1$ (рис. 117). Допустим сначала,

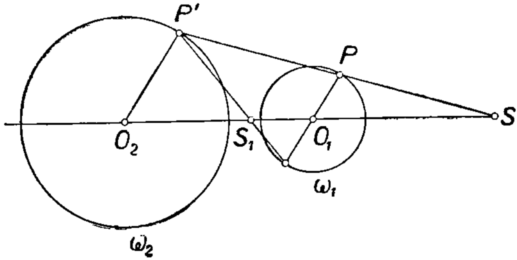

Рис. 117.

что центры O_1 и O_2 различны. Разделим отрезок O_2O_1 внешним и внутренним образом в отношении $R_2 : R_1$. Получим точки S и S_1, такие, что $SO_2 : SO_1 = S_1O_2 : S_1O_1 = R_2 : R_1$. Покажем, что гомотетия $\Gamma\left\{S, \frac{R_2}{R_1}\right\}$ преобразует окружность ω_1 в окружность ω_2. Легко убедиться прежде всего, что точка O_2 гомотетична точке O_1. Действительно:

1) S, O_1 и O_2 лежат на одной прямой;

2) $SO_2 : SO_1 = R_2 : R_1$ в силу самого выбора точки S. При этом S — внешний центр подобия, так как

$$\frac{R_2}{R_1} > 0.$$

Пусть теперь P — произвольная точка окружности ω_1, P' — гомотетичная ей точка. Тогда, в силу свойства **4**, **§ 2**, $O_2P' : O_1P = R_2 : R_1$. Но так как $O_1P = R_1$, то $O_2P' = R_2$. Итак, точка P', гомотетичная точке P в гомотетии $\Gamma\left\{S, \frac{R_2}{R_1}\right\}$, располагается на окружности ω_2. Нетрудно проверить, что и обратно: каждая точка окружности ω_2 гомотетична некоторой точке окружности ω_1 (в гомотетии $\Gamma\left\{S, \frac{R_2}{R_1}\right\}$). Поэтому окружности ω_1 и ω_2 перспективно-подобны относительно центра подобия S.

Таким же образом можно показать, что данные окружности перспективно-подобны относительно центра S_1, если рассматривать гомотетию относительно этого центра с коэффициентом $-\frac{R_2}{R_1}$.

Из хода доказательства теоремы выясняется следующий способ построения центров подобия двух неравных и неконцентричных окружностей $\omega_1(O_1, R_1)$ и $\omega_2(O_2, R_2)$. Изберём произвольно точку P на окружности ω_1 (вне линии центров). Проводим диаметр $P'P''$ окружности ω_2, параллельный O_1P (рис. 118).

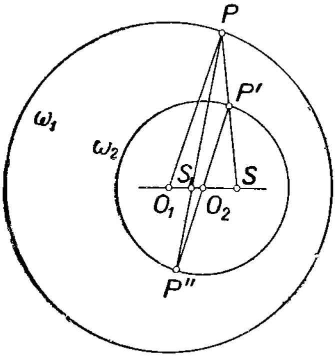

Рис. 118.

Если радиусы O_1P и O_2P' направлены одинаково, а радиусы O_1P и O_2P'' противоположно, то в пересечении прямой PP' с линией центров образуется внешний (S), а в пересечении прямой PP'' с линией центров внутренний (S_1) центры подобия данных окружностей.

Наше рассуждение проведено в предположении, что точки O_1 и O_2 различны. Если же две данные окружности концентричны, то общий их центр служит для них как внутренним, так и внешним центром подобия. Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 3. *Две несовпадающие окружности имеют не более одного внешнего центра подобия.*

Доказательство. Пусть прямая гомотетия $\Gamma\{S, k\}$ преобразует данную окружность $\omega_1(O_1, R_1)$ в другую данную окружность $\omega_2(O_2, R_2)$. Докажем, что в этом случае точка S совпадает с точкой, делящей отрезок O_1O_2 внешним образом в отношении $R_2 : R_1$, т. е. $SO_2 : SO_1 = R_2 : R_1$. Прежде всего заметим, что центр гомотетии S (рис. 119) должен лежать на линии центров, т. е. на прямой, проходящей через точки O_1 и O_2. Чтобы показать это, проведём прямую через S и O_1. Она пересечёт окружность ω_1 в двух точках A и B. Но тогда она должна пересечь и окружность ω_2

в двух точках A' и B', соответственно гомотетичных точкам A и B, ибо в противном случае гомотетия не была бы взаимно однозначным соответствием. Пусть теперь P — произвольная точка окружности ω_1, отличная от точек A и B. Тогда гомотетичная ей точка P' должна лежать на окружности ω_2 и, следовательно, является одной из точек пересечения окружности ω_2 и прямой SP. Соединим P с A и B, а P' — с A' и B'. Тогда $\measuredangle A'P'B'$ должен быть равен $\measuredangle APB$.

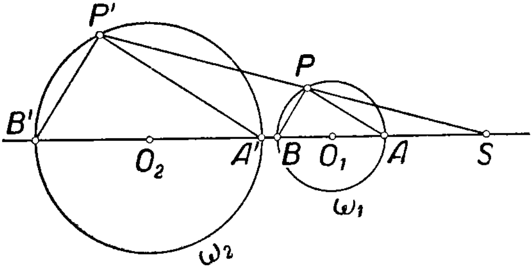

Рис. 119.

Но $\measuredangle APB = 90°$, ибо AB — диаметр окружности ω_1; значит, и угол $A'P'B' = 90°$, т. е. $A'B'$ — диаметр окружности ω_2. При гомотетии середина отрезка AB преобразуется в середину отрезка $A'B'$ (см. свойство 12 из § 2), т. е. точка O_1 преобразуется при гомотетии $\Gamma\{S, k\}$ в точку O_2. Отсюда вытекает, что три точки S, O_1 и O_2 лежат на одной прямой.

Коэффициент гомотетии $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{R_2}{R_1}$.

Таким образом, $\frac{SO_2}{SO_1} = \frac{R_2}{R_1}$. Кроме того, точка S вне отрезка O_1O_2, так как гомотетия, по условию, прямая.

Теорема доказана, так как существует только одна точка делящая отрезок O_1O_2 внешним образом в данном отношении.

Доказательство проводилось в предположении, что точки O_1 и O_2 не совпадают. Если же $O_1 \equiv O_2$, то доказательство лишь упрощается: в этом случае $S \equiv O_1 \equiv O_2$.

Аналогично можно доказать теорему: две несовпадающие окружности имеют не более одного внутреннего центра подобия.

Если две окружности равны, то они имеют только внутренний центр подобия.

Теорема 4. *Если две неравные окружности имеют общую внешнюю касательную, то она проходит через их внешний центр подобия.*

Доказательство. Пусть (рис. 120) T_1 и T_2 — точки касания окружностей ω_1 и ω_2 к их общей внешней касательной.

Прямая T_1T_2 пересекает линию центров в некоторой точке S^*. Из подобия треугольников $S^*O_1T_1$ и $S^*O_2T_2$ следует, что $S^*O_2 : S^*O_1 = R_2 : R_1$. С другой стороны, S^* вне отрезка O_1O_2, так как касательная T_1T_2 внешняя. Поэтому точка S^* совпадает с внешним центром подобия S (см. доказательство теоремы 2).

Аналогично доказывается и такая теорема: если две окружности имеют общую внутреннюю касательную, то она проходит через их внутренний центр подобия.

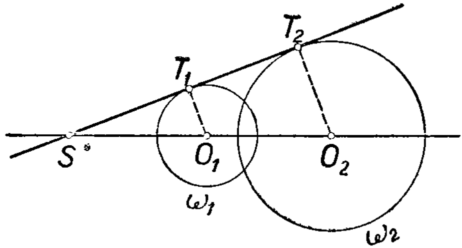

Рис. 120.

Если две окружности касаются, то точка их касания является их центром подобия. В самом деле, в этом случае точка касания делит отрезок, соединяющий центры окружностей, внешним или внутренним образом в отношении, равном отношению радиусов данных окружностей, и поэтому, согласно предыдущему, служит центром подобия.

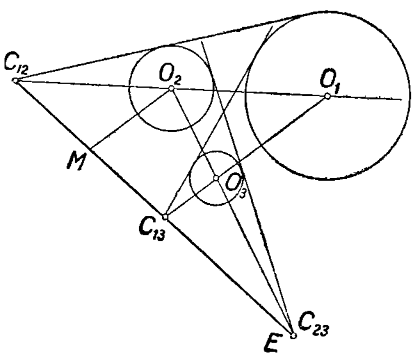

Рис. 121.

Теорема 5. *Если три окружности попарно не равны и центры их не лежат на одной прямой, то шесть центров подобия этих окружностей, рассматриваемых попарно, лежат по три на четырёх прямых.*

Доказательство. Обозначим центры подобия окружностей: внешние — через C_{12}, C_{13}, C_{23}, внутренние — соответственно через P_{12}, P_{13} и P_{23}. Докажем, что каждые три точки: C_{12}, C_{13}, C_{23}; C_{12}, P_{13}, P_{23}; C_{23}, P_{13}, P_{12} и C_{13}, P_{12}, P_{23} — располагаются на одной прямой.

Рассмотрим, например, точки C_{12}, C_{13} и C_{23}. Обозначим через E (рис. 121) точку пересечения прямой O_2O_3 с прямой $C_{12}C_{13}$. Через O_2 проведём прямую, параллельную O_1C_{13}, до пересечения с прямой

$C_{12}C_{13}$ в точке M. Тогда $EO_2:EO_3 = MO_2:C_{13}O_3$. Но из треугольников $C_{12}O_2M$ и $C_{12}O_1C_{13}$ видно, что $MO_2 = \frac{C_{12}O_2}{C_{12}O_1}\cdot C_{13}O_1$, так что

$$\frac{EO_2}{EO_3} = \frac{C_{12}O_2}{C_{12}O_1}\cdot\frac{C_{13}O_1}{C_{13}O_3} = \frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_3}.$$

Следовательно, E — внешний центр подобия окружностей ω_2 и ω_3, и поэтому точка E совпадает с точкой C_{23}.

Таким же образом доказывается эта теорема и в остальных случаях.

Заканчивая этот параграф, мы должны предупредить читателя относительно некоторых распространённых ошибок, которые нередко допускают лица, изучающие гомотетию.

1. Неправильно думать, что центры подобия трёх попарно гомотетичных фигур всегда лежат на одной прямой. Пусть, например, ω_1, ω_2 и ω_3 (рис. 122) — три равные окружности, центры

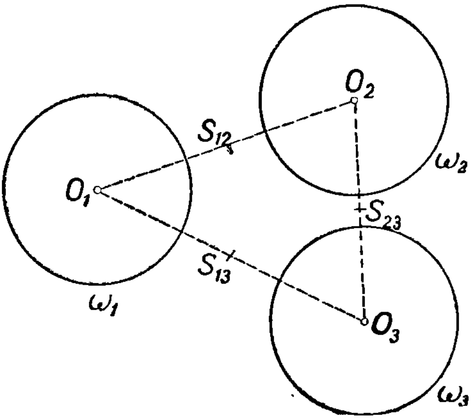

Рис. 122.

которых O_1, O_2 и O_3 не лежат на одной прямой. Центрами подобия этих окружностей будут, очевидно, середины сторон треугольника $O_1O_2O_3$, которые, конечно, не лежат на одной прямой (ибо они служат вершинами треугольника, подобного треугольнику $O_1O_2O_3$).

2. Неверно предложение: „в евклидовой плоскости две фигуры, гомотетичные третьей фигуре, гомотетичны между собой“. Опровергающий пример приведён на рисунке 123.

Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ неравнобедренные прямоугольные. $\triangle A_2B_2C_2$ получен из $\triangle A_1B_1C_1$ параллельным переносом по направлению A_1C_1.

$$B_3 \equiv A_1B_1 \times B_2C_2,\quad B_3C_3 \neq B_1C_1,\quad A_3C_3 \parallel A_1C_1;\quad S_{13} \equiv A_1A_3 \times C_1C_3,$$

$$S_{23} = C_2C_3 \times A_2A_3.$$

$\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ порознь гомотетичны треугольнику $A_3B_3C_3$. Если бы $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ были гомотетичны, то обязательно вершине A_1 соответствовала бы вершина A_2, вершине B_1 — вершина B_2, вершине C_1 — вершина C_2 (в силу того, что при гомотетии угол преобразуется в равный ему угол). Центр гомотетии лежал бы одновременно на прямых C_1C_2 и B_1B_2, т. е. в точке их пересечения. Но такой точки нет, ибо $B_1B_2 \parallel C_1C_2$.

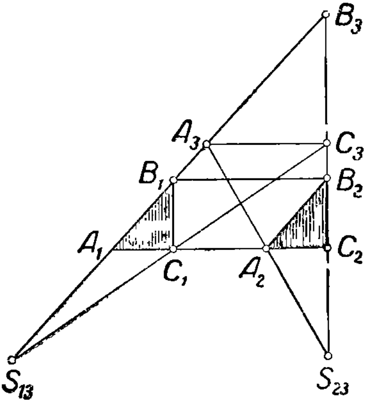

Рис. 123.

Примечание. Параллельный перенос можно рассматривать как предельный случай гомотетии, когда центр гомотетии неограниченно удаляется в бесконечность. В связи с этим некоторые авторы понимают гомотетию „в широком смысле", включая в это понятие и перенос. Можно показать, что две фигуры, гомотетичные третьей „в широком смысле", гомотетичны между собой также „в широком смысле".

§ 4. Построение гомотетичных фигур

Построение фигуры, гомотетичной данной, в простейших случаях сводится, как увидим ниже, к построению точек, гомотетичных данным. Поэтому выясним сначала, как может быть построена точка, гомотетичная данной, при различных способах задания гомотетии.

1-й случай. Гомотетия задана центром S и парой соответственных точек A и A' (причём точки S, A и A' расположены на одной прямой, а в остальном могут быть заданы произвольно).

Пусть P — произвольная точка плоскости, не лежащая на прямой SA. Проведём через точку A' прямую, параллельную AP, и пусть P' — точка её пересечения с прямой SP (рис. 124). Тогда P' и является образом точки P в данной гомотетии.

Если точка P лежит на прямой SA, то сначала выберем произвольную точку Q вне прямой SA и построим гомотетичную ей точку Q'. После этого, используя пару гомотетичных точек Q и Q', строим искомую точку P' описанным выше способом.

2-й случай. Гомотетия задана двумя парами соответственных точек. Пусть заданы точки A, P и соответственные им точки A' и P' (рис. 124). При этом прямые AP и $A'P'$ должны быть параллельными, если исключить случай, когда все эти четыре точки располагаются на одной прямой.

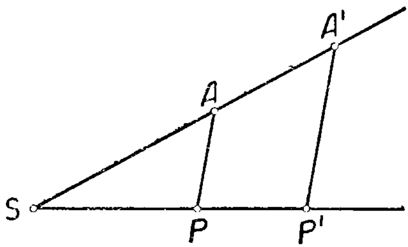

Рис. 124.

Кроме того, эти отрезки должны быть неравными или же равными, но противоположно направленными. При этих условиях легко определить центр гомотетии как точку пересечения прямых AA' и PP', а затем поступать, как в первом случае.

3-й случай. Гомотетия задана центром и коэффициентом. Пусть при этом коэффициент гомотетии задан как отношение данных отрезков m и n, т. е. $k=\frac{m}{n}$.

Покажем, что этот случай легко сводится к первому. Проведём из точки S произвольный луч l (рис. 125) и отложим на нём отрезки $SA=n$ и $SA'=m$. Ясно, что точки A и A' являются соответственными в данной гомотетии, так что мы пришли к случаю первому.

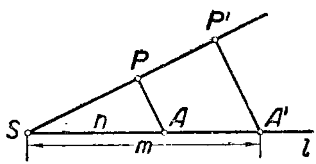

Рис. 125.

На рисунке 125 показано построение точки P', гомотетичной точке P.

Если коэффициент гомотетии задан как отношение двух натуральных чисел, например $k=\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа, то выбираем произвольный отрезок d и строим два отрезка $m=pd$ и $n=qd$. Отсюда $k=\frac{m}{n}$, и задача свелась к ранее рассмотренному случаю.

Пусть теперь требуется построить отрезок, гомотетичный данному отрезку PQ относительно центра S, если коэффициент $k=\frac{m}{n}$, где m и n — данные отрезки.

Отложим на произвольном луче, исходящем из точки S, отрезки $SA=n$, $SA'=m$. Ясно, что точка A' будет гомотетичной точке A в рассматриваемой гомотетии.

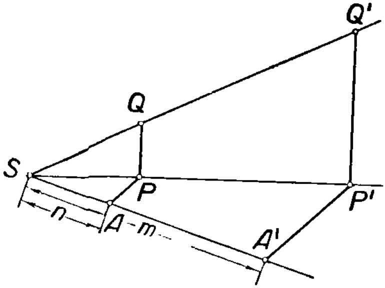

Рис. 126.

Строим затем точки P' и Q', гомотетичные точкам P и Q (рис. 126). Отрезок $P'Q'$ искомый.

Если точки P и Q не лежат на одной прямой с точкой S, то можно сначала ранее указанным способом построить точку P', гомотетичную точке P, а затем провести через P' прямую, параллельную PQ. Пусть Q' — точка её пересечения с прямой SQ. Отрезок $P'Q'$ искомый.

Построение многоугольника (треугольника, четырёхугольника и т. д.), гомотетичного данному, сводится к предыдущему построению.

На рисунке 127 показано построение треугольника, соответствующего треугольнику PQR в гомотетии $\Gamma\left\{S, \frac{m}{n}\right\}$. Здесь $SA=n$, $SA'=m$, $A'P' \parallel AP$, $P'Q' \parallel PQ$, $Q'R' \parallel QR$.

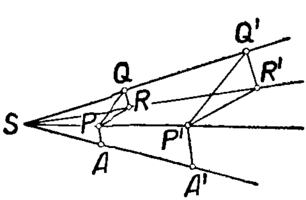

Рис. 127.

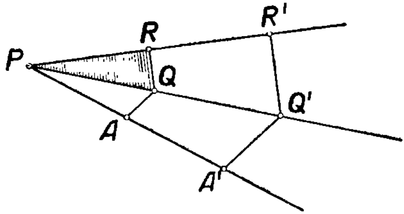

Рис. 128.

На рисунке 128 показано построение треугольника, соответствующего треугольнику PQR в гомотетии с центром в вершине P и коэффициентом $\frac{m}{n}$. Здесь $PA=n$, $PA'=m$, $A'Q' \parallel AQ$, $Q'R' \parallel QR$.

Приведём ещё пример. Пусть $PQRT$ — данная трапеция, S — данная точка на прямой PQ.

Из рисунка 129 ясно построение трапеции $P'Q'R'T'$, гомотетичной трапеции $PQRT$ относительно центра S и

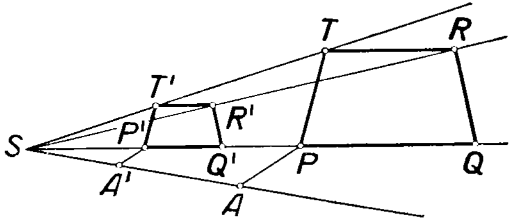

Рис. 129.

коэффициента $k = \frac{m}{n}$. Здесь $SA = n$, $SA' = m$, $A'P' \parallel AP$, $P'T' \parallel PT$, $T'R' \parallel TR$, $R'Q' \parallel RQ$.

Для построения окружности, соответствующей данной окружности в некоторой гомотетии, достаточно построить точки, соответственно гомотетичные центру данной окружности и точке на ней. Построение ясно из рисунка 130.

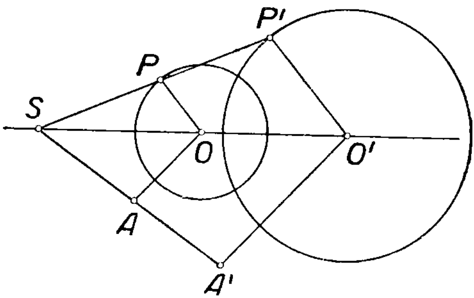

Рис. 130.

Здесь S — центр гомотетии, а коэффициент гомотетии равен $\frac{m}{n}$, где m и n — данные отрезки. $SA = n$, $SA' = m$, $A'O' \parallel AO$, P — произвольная точка на окружности (вне прямой SO), $O'P' \parallel OP$.

§ 5. Решение задач на построение методом подобия

Основная идея метода подобия состоит в следующем. Сначала строят фигуру, подобную искомой, так, чтобы она удовлетворяла всем условиям задачи, кроме одного. Затем строят уже искомую фигуру, как фигуру, подобную построенной и удовлетворяющую опущенному требованию.

Метод подобия находит применение обычно в случаях, когда среди данных лишь одно является отрезком, а все остальные данные — либо углы, либо отношения отрезков.

Обычно целесообразно вспомогательную фигуру строить так, чтобы она была не только подобна искомой, но и подобно расположена с ней. Успех решения существенно зависит в этих случаях от выбора центра подобия.

При решении задач на построение методом подобия часто полезно воспользоваться следующим замечанием. Если две фигуры подобны, то коэффициент подобия равен отношению любых двух соответствующих отрезков. Если отрезкам a, b, c, ... фигуры Ф соответствуют отрезки a', b', c', ... подобной фигуры Ф′, то коэффициент подобия равен также отношениям $\frac{a'+b'}{a+b}$, $\frac{a'-b'}{a-b}$, $\frac{a'+b'-c'}{a+b-c}$ и т. д.

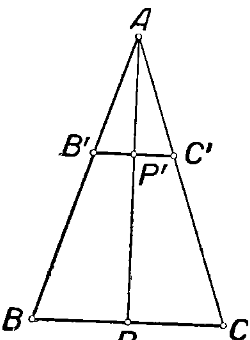

Рис. 131.

Пример 1. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и сумме основания с высотой.

Анализ. Искомый треугольник должен удовлетворять трём условиям:

1) он должен быть равнобедренным;

2) угол при вершине должен быть равен данному углу α;

3) сумма основания и соответствующей высоты должна быть равна данному отрезку l.

Замечаем, что легко построить треугольник, удовлетворяющий первым двум условиям. Таких треугольников существует бесконечно много. Пусть мы построили один из них — треугольник $B'AC'$ (рис. 131), причём $\measuredangle B'AC' = \alpha$.

Искомый треугольник, удовлетворяющий условиям 1) — 3), будем искать среди треугольников, гомотетичных треугольнику $B'AC'$ относительно какого-либо центра подобия, например относительно точки A. Пусть $\triangle BAC$ искомый. Ясно, что $BC \parallel B'C'$ (или $BC \equiv B'C'$). Пусть AP' —

высота треугольника $B'AC'$, P — точка пересечения прямых BC и AP'. Ясно, что AP — высота треугольника BAC.

Если в некоторой гомотетии точке B' соответствует точка B, то точкам C' и P' соответствуют точки C и P. Найдём коэффициент гомотетии, преобразующей треугольник $B'AC'$ в треугольник BAC. По условию дан отрезок l такой, что $BC + AP = l$. Кроме того, располагая построенным треугольником $B'AC'$, мы можем построить отрезок l', равный сумме $B'C' + AP'$.

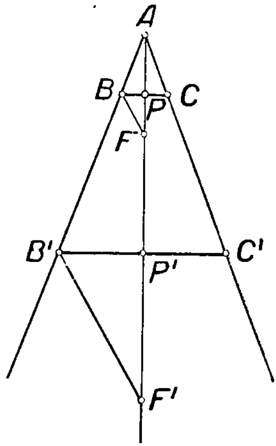

Рис. 132.

Тогда искомый коэффициент гомотетии равен $\frac{BC + AP}{B'C' + AP'}$, т. е. $\frac{l}{l'}$.

Итак, треугольник BAC гомотетичен треугольнику $B'AC'$ относительно центра подобия A, причём коэффициент подобия равен $\frac{l}{l'}$.

По этим данным искомый треугольник BAC может быть построен.

Построение.

1. Строим произвольный треугольник $B'AC'$ (см. рис. 132), удовлетворяющий условиям 1) и 2) (так, что $B'A = C'A$ и $\measuredangle B'AC' = \alpha$).

2. Строим высоту этого треугольника AP' и на продолжении отрезка AP' откладываем отрезок $P'F' = B'C'$ так, что $AF' = AP' + B'C'$. Эту сумму обозначим через l'.

3. Строим на луче AP' точку F такую, что $AF = l$.

4. Строим $\triangle BAC$, соответствующий $\triangle B'AC'$ в гомотетии $\Gamma\left\{A, \frac{l}{l'}\right\}$. Для этого последовательно строим $FB \parallel F'B'$, $BC \parallel B'C'$. $\triangle BAC$ искомый.

Доказательство.

Пусть $P' \equiv B'C' \times AP$. Так как $\triangle BAC \backsim \triangle B'AC'$, то $\frac{AP}{AP'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{AB'} = \frac{AF}{AF'} = \frac{l}{l'}$.

Поэтому $\frac{AP + BC}{AP' + B'C'} = \frac{l}{l'}$. Но $AP' + B'C' = l'$ по построению. Значит, $AP + BC = l$.

Итак, $\triangle BAC$ удовлетворяет условию 3). Очевидно, что он удовлетворяет и условиям 1) и 2).

Исследование. Все шаги проведённого построения однозначно выполнимы. Поэтому данный способ построения даёт единственное решение. Всякий другой треугольник $A_1B_1C_1$, удовлетворяющий условиям задачи, должен быть, очевидно, подобен построенному треугольнику ABC. Поэтому для всякого другого решения $A_1B_1C_1$, полученного каким-либо другим путём, будут выполняться соотношения:

$$\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1P_1}{AP}=\frac{A_1P_1+B_1C_1}{AP+BC}.$$

Так как $A_1P_1+B_1C_1=AP+BC$, то и $B_1C_1=BC$, откуда ясно, что $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$. Таким образом, всякий другой приём построения приведёт к тому же решению, так что задача разрешима однозначно.

Пример 2. В данный остроугольный треугольник ABC вписать квадрат так, чтобы две вершины квадрата лежали на основании треугольника, а две — на боковых сторонах.

Анализ. Требуется построить квадрат, удовлетворяющий следующим условиям:

1) две его вершины должны лежать на AB;

2) одна вершина — на AC;

3) одна вершина — на BC.

Замечаем, что легко построить квадрат, удовлетворяющий первым двум условиям. Пусть это будет квадрат $K'L'M'N'$ (см. рис. 133).

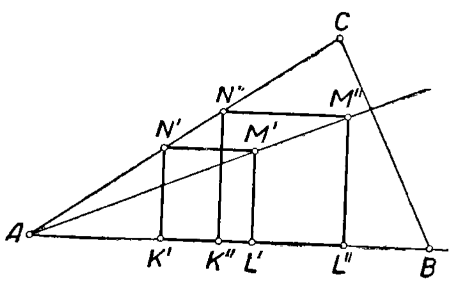

Рис. 133.

Ясно, что при гомотетии с центром A и любым коэффициентом гомотетии квадрат $K'L'M'N'$ преобразуется в квадрат $K''L''M''N''$, притом также удовлетворяющий условиям 1) и 2). При этом точка M'' окажется заведомо на прямой AM'.

Чтобы решить задачу, нужно среди квадратов $K''L''M''N''$, гомотетичных квадрату $K'L'M'N'$, выбрать тот, у которого точка M'' лежит на BC.

В таком случае точка M'' окажется точкой пересечения прямых AM' и BC. Отсюда вытекает построение.

Построение.

1. Строим произвольный квадрат $K'L'M'N'$, удовлетворяющий условиям 1) и 2) (см. рис. 134).

2. Строим прямую AM' и отмечаем точку M её пересечения со стороной BC.

3. Через M проводим прямую, параллельную $M'N'$, и отмечаем точку N, в которой она пересекает сторону AC.

4. Из M и N опускаем на AB перпендикуляры ML и NK. Полученный прямоугольник $KLMN$ — искомый квадрат.

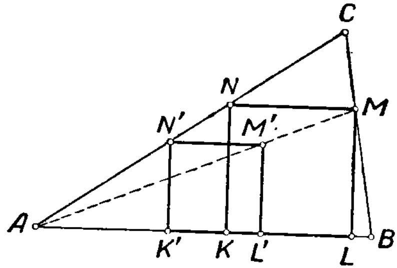

Рис. 134.

В самом деле, $KLMN$ — квадрат, ибо по самому способу построения он гомотетичен квадрату $K'L'M'N'$. Кроме того, он, очевидно, удовлетворяет всем остальным требованиям задачи.

Задача всегда однозначно разрешима.

Пример 3. Построить треугольник, зная отношения $m:b:h$ медианы, биссектрисы и высоты, проведённых из одной вершины, а также разность s радиусов описанной и вписанной окружностей.

Предварительно построим треугольник $A'B'C'$, для которого данные отрезки m, b и h являются соответственно медианой, биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины A'. Такое построение рассмотрено в задаче 3, гл. 1, § 7.

Искомый треугольник можно получить из треугольника $A'B'C'$ посредством гомотетии с центром A' и коэффициентом $k=\frac{s}{s'}$, где s' — разность радиусов R' и r' окружностей, из которых одна описана около треугольника $A'B'C'$, а другая вписана в него. При этом точка A' перейдёт в себя, а точки B' и C' соответственно в точки B и C. Треугольник $A'BC$ удовлетворяет условиям задачи.

В самом деле, медиана, биссектриса и высота треугольника $A'B'C'$ перейдут соответственно в такие же элементы треугольника $A'BC$, причём гомотетия не изменит их отношений. Если R и r — радиусы окружностей, описанной и вписанной в треугольник ABC, то $R:R'=k$ и $r:r'=k$, откуда следует, что $\frac{R}{r}=\frac{R'}{r'}$, $\frac{R-r}{R'-r'}=\frac{r}{r'}=k$. Таким образом, $R-r=k(R'-r')=ks'=s$, что и требовалось доказать.

Задача однозначно разрешима при условии: $m>b>h$. Если $m=b=h$, то задача становится неопределённой. Другие соотношения между медианой, биссектрисой и высотой треугольника невозможны.

§ 6. Пантограф

Существует механизм, который даёт возможность вычертить фигуру, перспективно-подобную любой заданной фигуре, притом с любым положительным коэффициентом подобия. Это — *пантограф*. Впервые он был создан в начале XVII в.

Пантограф (рис. 135) состоит из четырёх стержней SC, BC, DA и AF, скреплённых шарнирно в точках D, C, F

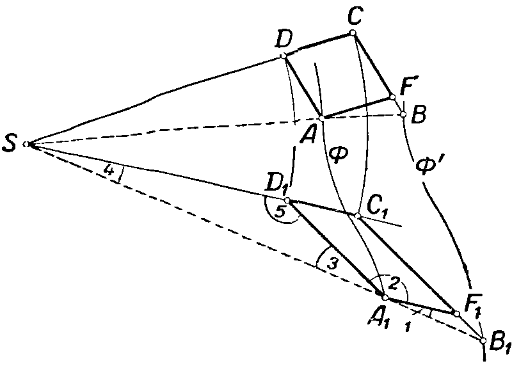

Рис. 135.

и A. Эти точки выбираются так, что в некотором начальном положении пантографа четырёхугольник $ADCF$ — параллелограмм, причём точки A и B лежат на одном луче, исходящем из точки S. Точка S закрепляется на плоскости неподвижно. Пусть длины стержней BC и AD равны соответственно m и n. Когда точка A опишет какую-либо фигуру Φ, то точка B опишет некоторую фигуру Φ', соответствующую фигуре Φ в гомотетии с центром в точке S и коэффициентом $k=\frac{m}{n}$.

Докажем это.

Пусть в некоторый момент пантограф расположен так, что точки A, B, C, D, F занимают соответственно положение A_1, B_1, C_1, D_1, F_1, причём точка A_1 лежит на линии Ф. Покажем, что точка B_1 гомотетична точке A_1 в гомотетии $\Gamma\left\{S, \frac{m}{n}\right\}$. Для этого нужно показать, что: 1) точки A_1 и B_1 лежат на одном луче, исходящем из точки S (для чего достаточно показать, что $\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 180°$), 2) $\frac{SB_1}{SA_1} = \frac{m}{n}$.

Так как при перемещении пантографа его стержни не меняют своей длины, то $SD_1 = SD$; $SC_1 = SC$; $D_1A_1 = DA$; $D_1C_1 = DC$; $A_1F_1 = AF$; $C_1F_1 = CF$. По условию $ADCF$ — параллелограмм. Следовательно,

$$AF = DC, \quad AD = CF. \tag{1}$$

Поэтому $A_1F_1 = D_1C_1$, $A_1D_1 = C_1F_1$, т. е. $A_1D_1C_1F_1$ — также параллелограмм. Значит, $D_1C_1 \parallel A_1F_1$. Поэтому

$$\measuredangle A_1F_1B_1 = \measuredangle 5 = \measuredangle 2. \tag{2}$$

Кроме того, из подобия треугольников SDA и AFB следует, что $\frac{AF}{BF} = \frac{SD}{AD}$, а значит

$$\frac{A_1F_1}{B_1F_1} = \frac{SD_1}{A_1D_1}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) ясно, что $\triangle SD_1A_1 \backsim \triangle A_1F_1B_1$. Поэтому $\measuredangle 1 = \measuredangle 4$.

Отсюда следует, что A_1 и B_1 лежат на одном луче, исходящем из точки S.

Кроме того, ясно, что $\frac{SB_1}{SA_1} = \frac{B_1C_1}{A_1D_1}$. Но так как $B_1C_1 = BC = m$, $A_1D_1 = AD = n$, то $\frac{SB_1}{SA_1} = \frac{m}{n}$, что и требовалось показать.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что такое гомотетия?

2. Во что преобразуется при гомотетии прямая? луч? отрезок? окружность? квадрат?

3. Площадь треугольника ABC равна S. Чему равна площадь треугольника, соответствующего треугольнику ABC в гомотетии с коэффициентом k?

4. Когда центр подобия двух фигур называется внутренним и когда внешним?

5. Сколько центров подобия имеется у двух несовпадающих окружностей? Какие возможны случаи?

6. Построить центры подобия двух эксцентрических окружностей.

7. Сформулировать теорему о центрах подобия трёх окружностей.

8. Как построить фигуру, гомотетичную данному многоугольнику? данной окружности?

9. В чём состоит сущность метода подобия при решении задач на построение?

10. Что такое пантограф и как он устроен?

ЗАДАЧИ

1. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами a и b и гипотенузой c. Известно также, что в треугольнике $A'B'C'$, подобном треугольнику ABC, сумма катетов больше гипотенузы на отрезок d. Чему равен коэффициент подобия этих треугольников?

2. Дан треугольник ABC со сторонами a, b, c. В подобном ему треугольнике $A'B'C'$ сумма площадей квадратов, построенных на его сторонах, равна площади прямоугольника со сторонами p и q. Чему равен коэффициент подобия треугольников ABC и $A'B'C'$?

3. Построить прямоугольный треугольник, у которого один катет вдвое больше второго, а гипотенуза равна данному отрезку c.

4. Построить прямоугольный треугольник, у которого один катет вдвое больше второго, а высота, опущенная на гипотенузу, равна данному отрезку h.

5. Построить прямоугольный треугольник, у которого один катет вдвое больше второго, а сумма катетов и высоты, опущенной на гипотенузу, равна данному отрезку.

6. Построить треугольник по двум углам, прилежащим к основанию, и высоте, опущенной на основание (или на боковую сторону).

7. То же — по двум углам, прилежащим к основанию, и периметру.

8. Построить треугольник по углу при вершине, отношению $\frac{m}{n}$ $(m > n)$ боковых сторон и медиане, проведённой к большей из боковых сторон.

9. Построить треугольник, зная отношение его сторон $m:n:p$ $(m > n > p)$ и биссектрису наименьшего из его углов.

10. Построить треугольник по углам α и β, прилежащим к основанию $(\alpha < 45°,\ \beta < 45°)$, и разности между основанием и высотой, опущенной на основание.

11. Построить треугольник, зная углы при основании и разность квадратов основания и соответствующей высоты, равную p^2 (где p — данный отрезок).

12. В данный треугольник вписать прямоугольник, у которого одна сторона в три раза больше второй.

13. В данный треугольник ABC вписать другой треугольник так, чтобы его стороны были параллельны данным прямым u, v и w.

14. В данный треугольник ABC вписать ромб с данным острым углом α так, чтобы одна из его сторон лежала на отрезке AB, а две его вершины — на боковых сторонах треугольника. (Неполное решение этой задачи имеется в стабильном учебнике геометрии А. П. Киселёва (ч. 1, § 181, задача 3). Дайте полное решение этой задачи и сравните его с тем решением, которое приводит А. П. Киселёв.)

15. В данный треугольник вписать параллелограмм, подобный данному.

16. Дать полное решение задачи 2 из § 181 учебника А. П. Киселёва и сравнить его с тем решением, которое приводится в учебнике.

17. Вписать в данную окружность треугольник, у которого даны основание и отношение боковых сторон (решить задачу методом подобия и методом геометрических мест).

18. Вписать в данную окружность равнобедренный треугольник, зная отношение основания к боковой стороне.

19. Вписать квадрат в данный сегмент.

20. Вписать квадрат в данный сектор.

21. Дан прямой угол и внутри его точка M. Построить прямоугольный треугольник, катеты которого находились бы на сторонах этого угла, а гипотенуза, проходя через точку M, делилась бы ею в данном отношении $m:n$.

22. Через две данные точки M и N внутри данного угла AOB провести пару параллельных прямых так, чтобы их отрезки, заключённые между сторонами данного угла, относились, как $3:1$.

23. Дан острый угол AOB и внутри него точка C. Найти на стороне OB точку M, равноудалённую от стороны OA и от точки C.

24. Участок имеет форму семиугольника. Имеется план участка в масштабе $1:25\,000$. Вычертить план того же участка в масштабе $1:15\,000$.

25. Две (несовпадающие) окружности имеют не более двух центров подобия (см. § 3). Могут ли две (несовпадающие) фигуры иметь более двух центров подобия?

Глава V

ИНВЕРСИЯ

Рассмотрим в этой главе ещё одно геометрическое преобразование — инверсию, которая даёт возможность решить ряд сравнительно сложных задач на построение, трудно поддающихся решению с помощью других рассмотренных нами приёмов. Новый способ решения конструктивных задач, который мы здесь рассмотрим, носит название метода *инверсии*, или метода *обращения*, или метода *обратных радиусов*. Заметим попутно, что этот метод значительно „моложе“ ранее рассмотренных. Инверсию стали изучать впервые лишь в 30-х годах прошлого века.

§ 1. Определение инверсии. Построение инверсных точек

Пусть на плоскости дана некоторая окружность $\omega(O, R)$ (рис. 136).

Пусть, далее, P — произвольная точка плоскости, отличная от точки O. Сопоставим ей точку P', которая удовлетворяла бы двум условиям:

1) точка P' лежит на луче OP;

2) $OP \cdot OP' = R^2$.

Такую точку P' мы называем *инверсной* или *обратной* точке P относительно окружности ω. Окружность ω называется *базисной окружностью* инверсии, её центр — *центром инверсии*, а радиус — *радиусом инверсии*.

Преобразование, при котором каждой точке некоторой фигуры ставится в соответствие инверсная ей точка, называется *инверсией*, а фигура, образованная всеми точками, инверсными точкам данной фигуры, называется *инверсной* по отношению к данной фигуре.

Обратим внимание на то, что при $R=1$ $OP' = \frac{1}{OP}$; так что если точка P инверсна точке P', то расстояния OP и OP' являются взаимно обратными числами. С этим связано то, что точку P' называют *обратной* точке P, а рассматриваемое преобразование называется преобразованием *обратных радиусов* (расстояний), или же *обращением* (по-латыни — *inversio*).

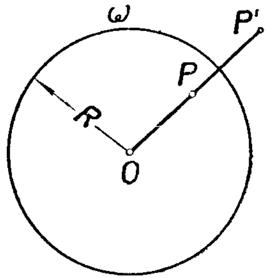

Рис. 136.

Отметим простейшие свойства инверсии, непосредственно вытекающие из определения.

1. Если точка P' инверсна точке P, то и обратно: точка P инверсна точке P'.

2. Если при инверсии фигура Ф преобразуется в фигуру Ф$'$, то и наоборот: фигура Ф$'$ преобразуется в фигуру Ф.

3. Никакая точка плоскости не является инверсной для центра инверсии.

В дальнейшем мы поэтому при изучении инверсии будем иметь в виду плоскость, из которой удалён, „выколот" центр инверсии. Например, если говорится о преобразовании луча, выходящего из центра инверсии (п. 8), или о преобразовании прямой, проходящей через центр инверсии (п. 9), то имеется в виду фигура, которая образуется, если удалить из луча (или прямой) центр инверсии.

4. На плоскости с „выколотым" центром инверсии инверсия является взаимно однозначным преобразованием.

5. Каждая точка базисной окружности инверсна самой себе.

6. Если данная точка лежит вне базисной окружности, то инверсная ей точка лежит внутри этой окружности, и наоборот.

Это вытекает из равенства: $OP' = \frac{R^2}{OP}$.

7. Если точка, лежащая вне базисной окружности, неограниченно удаляется от этой окружности, то инверсная ей точка (внутри базисной окружности) неограниченно приближается к центру инверсии. Верно и обратное предложение.

8. При инверсии луч, исходящий из центра инверсии, преобразуется в себя. При этом часть луча, внутренняя относительно базисной окружности, преобразуется в его внешнюю часть, и наоборот.

9. При инверсии прямая, проходящая через центр инверсии, преобразуется в себя. (Конечно, при этом имеется в виду, что центр инверсии предварительно удалён из этой прямой.)

Построение точки, инверсной данной, может быть выполнено с помощью циркуля и линейки. Такое построение можно рассматривать как геометрическое определение инверсии. Построение это основано на двух теоремах, известных из школьного курса геометрии:

1) Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, соединяющему центр с точкой касания.

2) Катет прямоугольного треугольника является средним пропорциональным между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу.

Следует рассмотреть три случая построения.

1-й случай. Точка P на базисной окружности. Инверсная точка — сама точка P.

2-й случай. Точка P вне базисной окружности $\omega(O, R)$. Строим луч OP (рис. 137). Через точку P проводим касательную PT к базисной окружности. Из точки касания T опускаем перпендикуляр на прямую OP. Основание этого перпендикуляра P' является точкой, инверсной точке P. Действительно, из прямоугольного треугольника OTP видно, что $OP \cdot OP' = OT^2 = R^2$.

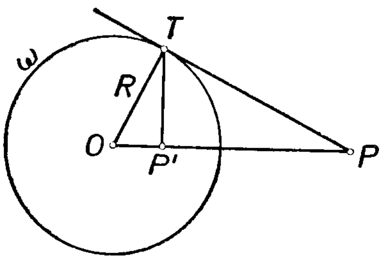

Рис. 137.

Замечание. Фактически это построение может быть выполнено следующим образом. Строим последовательно (рис. 138): луч OP, окружность ω' с диаметром OP, хорду TT_1, соединяющую точки пересечения вспомогательной окружности ω' с базисной окружностью ω. Тогда точка P' пересечения этой хорды с лучом OP инверсна точке P.

3-й случай. Точка P внутри базисной окружности. Ввиду взаимности соответствия точек P и P' при инверсии этот случай сводится к построению прообраза по образу в условиях предыдущего случая, так что надо в точке P

восставить перпендикуляр к прямой OP, найти одну из точек его пересечения с базисной окружностью и в этой точке

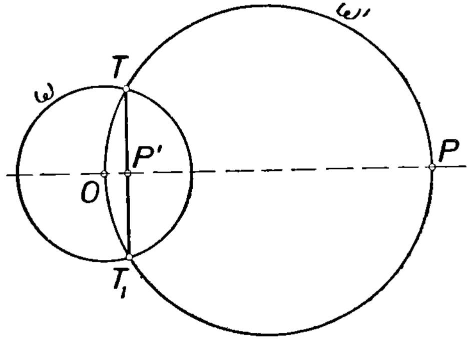

Рис. 138.

провести касательную к базисной окружности до пересечения с лучом OP в точке P'.

§ 2. Лемма об антипараллельных прямых

Для дальнейшего нам понадобится одно вспомогательное понятие.

Пусть некоторая прямая a пересекает обе стороны некоторого угла (k, l) (рис. 139). В пересечении с какой-либо из сторон угла, например k, эта прямая образует четыре угла, из которых только один лежит внутри треугольника, отсекаемого прямой от угла (k, l).

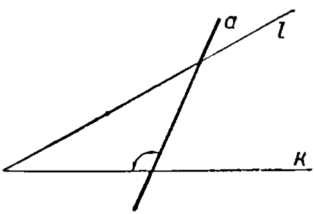

Рис. 139.

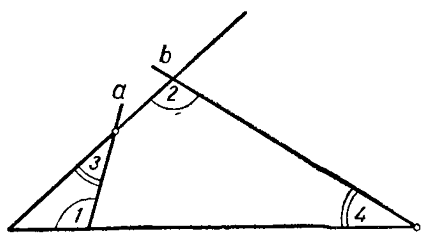

Рис. 140.

В дальнейшем, когда будет идти речь об угле между прямой и стороной угла, мы будем иметь в виду именно этот угол.

Пусть теперь две прямые (рис. 140) пересекают стороны угла, причём одна из них образует с одной из сторон угла такой же угол, какой вторая прямая образует с другой стороной угла (на рис. $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$). Легко понять, что тогда и первая прямая образует со второй стороной угла такой же угол, какой образует вторая прямая с первой стороной угла ($\measuredangle 3 = \measuredangle 4$).

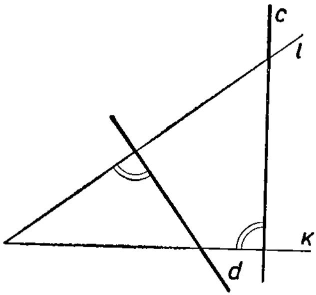

Рис. 141.

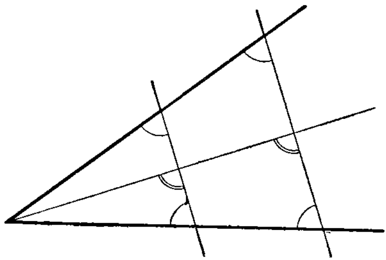

Рис. 142.

Определение. Две прямые, пересекающие стороны некоторого угла, называются *антипараллельными* относительно этого угла, если одна из них образует с одной из его сторон такой же угол, какой образует другая прямая с другой его стороной.

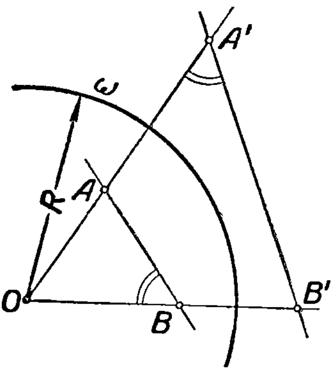

Рис. 143.

Антипараллельными являются прямые a и b на рисунке 140, прямые c и d на рисунке 141, где $c \perp k$ и $d \perp l$.

Антипараллельные прямые, вообще говоря, не параллельны. Исключение составляет только случай, когда обе прямые перпендикулярны к биссектрисе данного угла (рис. 142).

Теорема (лемма об антипараллельных прямых). *Прямая, соединяющая две точки плоскости, и прямая, соединяющая две инверсные им точки, антипараллельны относительно угла с вершиной в центре инверсии и сторонами, проходящими через данные точки.*

Доказательство.

Пусть $\omega(O, R)$ базисная окружность, точки A' и B' (рис. 143) инверсны соответственно точкам A и B. Тогда

$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2$, так что $OA : OB = OB' : OA'$. Кроме того, в треугольниках AOB и $B'OA'$ угол O общий. Следовательно, $\triangle AOB \backsim \triangle B'OA'$ и, значит, $\measuredangle OBA = \measuredangle OA'B'$.

Таким образом, прямые AB и $A'B'$ антипараллельны относительно угла AOB, что и требовалось доказать.

Если (рис. 143) каким-либо образом построены две соответственные в инверсии точки A и A', то доказанная лемма даёт простой приём построения образа произвольной точки B (не лежащей на прямой OA): соединить B с A и провести прямую $A'B'$ так, чтобы $\measuredangle OA'B' = \measuredangle OBA$.

Предлагаем читателю применить эту же лемму для построения образа какой-либо точки прямой OA.

§ 3. Инверсия окружности, проходящей через центр инверсии

Пусть некоторая окружность γ проходит через центр инверсии — точку O. При инверсии все точки окружности γ, за исключением точки O, преобразуются в какие-то другие точки. Какую фигуру образуют эти точки?

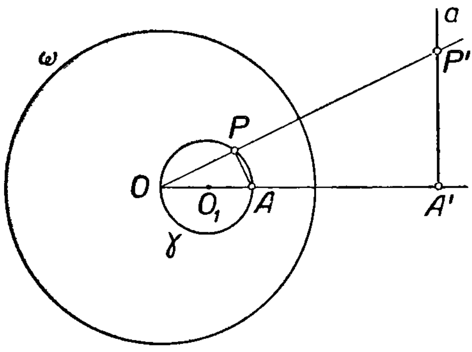

Рис. 144.

Теорема. *При инверсии окружность, проходящая через центр инверсии, преобразуется в прямую. Эта прямая перпендикулярна к линии центров данной окружности и базисной окружности.*

Доказательство. Пусть $\omega(O, R)$ — базисная окружность инверсии, $\gamma(O_1, R_1)$ — данная окружность, проходящая через O. Проведём прямую OO_1. Пусть она пересечёт окружность γ в точке A (рис. 144). Обозначим через A'

точку, инверсную точке A. Выберем на окружности γ произвольную точку P и построим ей инверсную точку P'. Соединим P с A, P' с A'. В силу леммы об антипараллельных прямых $\measuredangle OA'P' = \measuredangle OPA$. Но $\measuredangle OPA = 90°$, как опирающийся на диаметр окружности γ. Поэтому $OA'P'$ также равен $90°$, т. е. точка P' лежит на прямой, проходящей через точку A' и перпендикулярной к прямой OO'. Обозначим прямую $P'A'$ через a. Мы показали, что каждая точка окружности γ преобразуется в точку прямой a. Нетрудно показать, что и обратно: каждая точка прямой a инверсна некоторой точке окружности γ. Следовательно, окружность γ преобразуется при инверсии в прямую a, что и требовалось доказать.

Из рассмотренной теоремы вытекает способ построения прямой, инверсной данной окружности, если последняя проходит через центр инверсии: 1) строим прямую OO_1, проходящую через центр инверсии и центр данной окружности; 2) отмечаем точку A пересечения этой прямой с данной окружностью ($A \neq O$); 3) строим точку A', инверсную точке A, и 4) через точку A' проводим прямую a, перпендикулярную прямой OO_1. Полученная прямая a искомая.

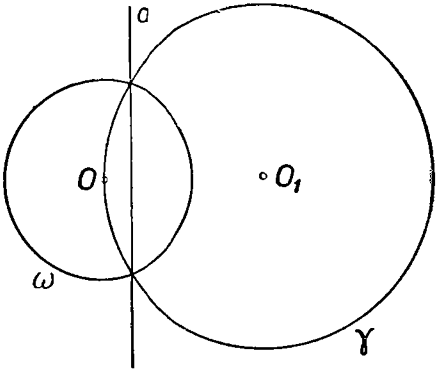

Рис. 145.

В том случае, когда базисная окружность пересекает данную окружность γ, построение упрощается: прямой, инверсной окружности γ, является прямая, определяемая двумя точками пересечения окружности γ с базисной окружностью (рис. 145).

Если окружность γ касается базисной окружности ω, то γ преобразуется в общую касательную этих окружностей.

Если две окружности касаются в центре инверсии, то они преобразуются при инверсии в пару параллельных прямых.

§ 4. Инверсия окружности, не проходящей через центр инверсии

Теорема. *При инверсии окружность, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность.*

Доказательство. Пусть $\omega(O, r)$ — базисная окружность (рис. 146), $\gamma(O_1, r_1)$ — данная окружность. Проведём

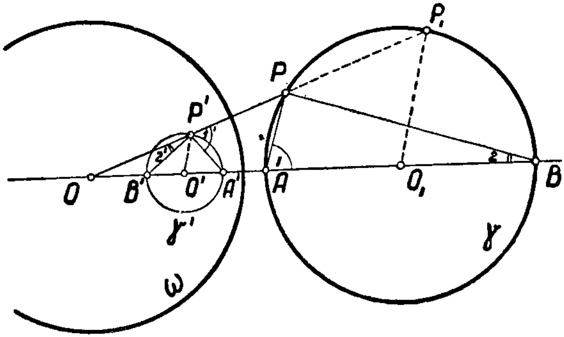

Рис. 146.

прямую OO_1 и отметим точки A и B её пересечения с окружностью γ. Пусть A' и B' — инверсные им точки. Обозначим через P произвольную точку окружности γ, через P' — инверсную ей точку. Соединим P с A и B, P' с A' и B'. Из леммы об антипараллельных прямых вытекает, что $\angle 1' = \angle 1$, $\angle 2' = \angle 2$. Но $\angle 1 + \angle 2 = 90°$. Поэтому $\angle 1' + \angle 2' = 90°$. Следовательно, $\angle A'P'B' = 90°$. Таким образом, из точки P' отрезок $A'B'$ виден под прямым углом. Значит, точка P' лежит на окружности с диаметром $A'B'$. Обозначим эту окружность через γ'. Мы доказали, что каждая точка окружности γ при инверсии преобразуется в точку окружности γ'. Исходя из свойств 1 и 2 § 1, можно доказать, что и наоборот: каждая точка окружности γ' является образом некоторой точки окружности γ. Теорема доказана.

По ходу доказательства теоремы выясняется следующий способ построения окружности, инверсной данной окружности (если последняя не проходит через центр инверсии): 1) проводим прямую через центр инверсии O и центр O_1 данной окружности γ; 2) отмечаем точки A и B пересечения этой прямой с окружностью γ; 3) строим инверсные точки A' и B'; 4) строим окружность γ' на отрезке $A'B'$ как на диаметре. Окружность γ' искомая.

Замечание. При всех ранее рассмотренных преобразованиях (перенос, вращение, симметрия, гомотетия) окружность преобразовывалась в окружность, причём центр данной окружности преобразовывался в центр образа этой окружности. Лица, изучающие геометрические построения, часто полагают, что аналогичное обстоятельство имеет место и для инверсии. Это неверно: если при инверсии окружность γ преобразуется в окружность γ', а центр O_1 окружности γ преобразуется в точку O_1', то точка O_1' заведомо не будет центром окружности γ'.

Теорема. Две инверсно соответственные окружности можно рассматривать также как гомотетичные, причём центр гомотетии совпадает с центром инверсии, а коэффициент гомотетии равен отношению радиусов.

Обратимся ещё раз к рисунку 146. Пусть P_1 — вторая точка пересечения прямой OP с окружностью γ. Тогда, с одной стороны, $\measuredangle BPP_1 = \measuredangle A'B'P'$ по лемме об антипараллельных прямых, а, с другой стороны, $\measuredangle BPP_1 = \measuredangle BAP_1$, так как оба эти угла вписаны в окружность γ и опираются на одну и ту же дугу BP_1. Следовательно, $\measuredangle A'B'P' = \measuredangle BAP_1$. Отсюда легко заключить, что $P'O' \parallel P_1O_1$, а поэтому $OP' : OP_1 = O'P' : O_1P_1 = \text{const}$. Таким образом, окружность γ' соответствует окружности γ в гомотетии $\Gamma\left\{O, \dfrac{O'P'}{O_1P_1}\right\}$, причём эта гомотетия переводит точку P_1 в точку P' (в то время как данная инверсия переводит P в P').

§ 5. Преобразование прямой при инверсии

Мы уже видели, что при инверсии прямая, проходящая через центр инверсии, преобразуется сама в себя. Как обстоит дело с прямой, не проходящей через центр инверсии?

Теорема. *При инверсии прямая, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, проходящую через центр инверсии.*

Пусть $\omega(O, r)$ (рис. 147) — базисная окружность, a — данная прямая. Опустим из точки O перпендикуляр OA на прямую a. Пусть A' — точка, инверсная точке A, а γ — окружность, имеющая диаметром OA'. При инверсии окружность γ преобразуется в прямую a (см. теорему § 3). В силу свойства взаимности (см. § 1, свойство 2) прямая a преобразуется в окружность γ.

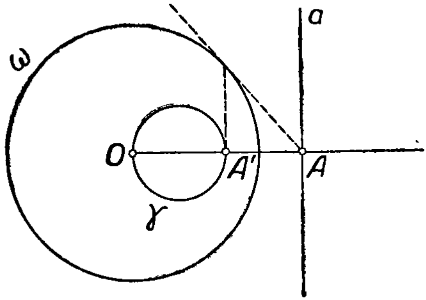

Рис. 147.

Эту теорему можно было доказать и непосредственно, без ссылки на теорему § 3.

Заметим, что по ходу доказательства мы выяснили способ построения окружности, инверсной данной прямой.

§ 6. Инвариантные окружности

При инверсии базисная окружность преобразуется в себя (§ 1, свойство 5). Существуют ли другие окружности, обладающие таким свойством?

Напомним некоторые определения.

Углом между двумя линиями в точке их пересечения T называется угол между касательными к этим линиям, проведёнными в точке T.

Две окружности называются *ортогональными*, если они пересекаются под прямым углом. Если две окружности ортогональны, то их радиусы, проведённые в точку пересечения, перпендикулярны между собой, и наоборот. Отсюда вытекает способ построения окружностей, ортогональных данной окружности ω в данной точке T. Для этого достаточно на касательной t к окружности ω в точке T выбрать произвольную точку O_1 и построить окружность $\omega_1(O_1, O_1T)$, которая и будет искомой (рис. 148).

Ответим теперь на вопрос, поставленный в начале этого параграфа.

Теорема. Для того чтобы окружность, отличная от базисной окружности, преобразовалась при инверсии в себя, необходимо и достаточно, чтобы она была ортогональна базисной окружности.

Доказательство. 1) Достаточность. Пусть окружность $\gamma(O_1, r_1)$ (рис. 149) ортогональна базисной окружности $\omega(O, r)$. Докажем, что окружность γ преобразуется в себя. Пусть P — произвольная точка ок-

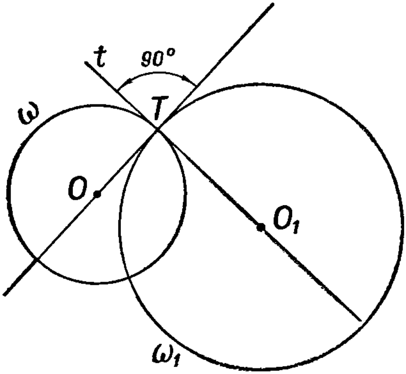

Рис. 148.

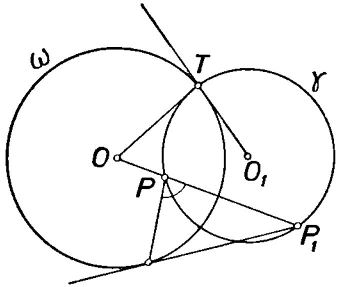

Рис. 149.

ружности γ. Проведём прямую OP. Она пересечёт окружность γ ещё в некоторой точке P_1 (если прямая OP касается окружности γ, то за P_1 примем точку P).

Так как окружность γ ортогональна окружности ω, то радиус OT, соединяющий центр инверсии с точкой пересечения окружностей, касается окружности γ. Поэтому $OP \cdot OP_1 = OT^2 = r^2$, так что точка P_1 инверсна точке P. Итак, при инверсии относительно окружности ω каждая точка P окружности γ преобразуется в точку P_1, также лежащую на окружности γ.

Принимая во внимание свойство взаимности инверсных точек (§ 1, свойство 1), можно заключить также, что и обратно: каждая точка окружности γ служит образом некоторой точки этой же окружности. Таким образом, окружность γ преобразуется в себя.

2) Необходимость. Пусть окружность γ, отличная от базисной окружности инверсии, преобразуется в себя. Докажем, что γ — окружность, ортогональная базисной. Так как окружность γ отлична от окружности ω, то она

содержит точку P, не лежащую на ω. Пусть точка P_1 инверсна точке P (рис. 149); тогда одна из двух точек P и P_1 находится вне, а другая внутри окружности ω. Следовательно, окружность γ пересекает окружность ω. Обозначим через T одну из точек их пересечения. Покажем, что OT — касательная к окружности γ. Это можно установить способом „от противного". Допустим, что, помимо точки T, прямая OT встречает окружность γ ещё в точке T_1. Заметим, что точки P и P_1 расположены по одну сторону от точки O, так что точка O расположена вне окружности γ. В силу известного свойства секущих, проведённых из одной и той же точки к окружности, $OT \cdot OT_1 = OP \cdot OP_1 = r^2$. И так как $OT = r$, то и $OT_1 = r$. Следовательно, точка T_1 должна совпасть с точкой T, вопреки допущению. Итак, OT — касательная к окружности γ. Следовательно, окружности ω и γ ортогональны.

Теорема. *Если окружность проходит через две взаимно инверсные точки, то при инверсии она преобразуется в себя.*

Доказательство. Пусть окружность γ проходит через точки P и P', инверсные относительно окружности $\omega(O, r)$. Тогда $OP \cdot OP' = r^2$. Ясно, что точка O вне окружности γ. Пусть Q — произвольная точка на окружности γ (рис. 150). Проведём луч OQ, и пусть он встречает окружность γ в точках Q и Q' (в случае касания луча OQ с окружностью γ $Q' \equiv Q$), тогда $OQ \cdot OQ' = OP \cdot OP' = r^2$, т. е. точка Q' инверсна точке Q. Итак, если какая-либо точка лежит на окружности γ, то инверсная ей точка также лежит на этой окружности. Отсюда заключаем, что при инверсии окружность γ преобразуется в себя.

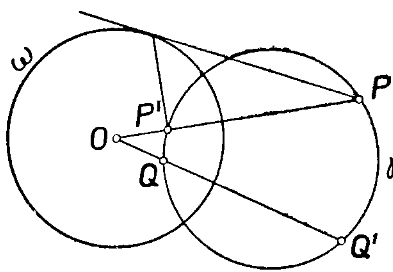

Рис. 150.

Следствие. Окружность, проходящая через две взаимно инверсные точки, ортогональна к базисной окружности инверсии. Все окружности, проходящие через две взаимно инверсные точки, образуют эллиптический пучок, состоящий из окружностей, ортогональных базисной окружности инверсии

§ 7. Сохранение углов при инверсии

Пусть через точку M проходят две линии γ_1 и γ_2. Предположим, что существует единственная касательная к каждой из этих линий в точке M. Пусть при инверсии точка M преобразуется в точку M', а линии γ_1 и γ_2 соответственно в линии γ_1' и γ_2'. Оказывается, что угол между линиями γ_1' и γ_2' в точке M' равен углу между линиями γ_1 и γ_2 в точке M.

Лемма. *Если при инверсии относительно окружности $\omega(O, r)$ точка M и проходящая через неё линия γ преобразуются в точку M' и линию γ', то линии γ и γ' в этих точках образуют с прямой OM равные углы.*

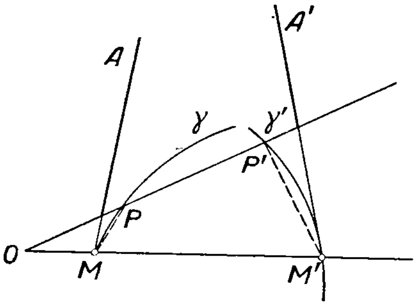

Рис. 151.

Доказательство. Пусть P (рис. 151) — произвольная точка на линии γ, P' — ей инверсная точка; тогда P' лежит на γ'.

Соединим M с P, M' с P'. В силу леммы об антипараллельных прямых $\measuredangle MM'P' = \measuredangle MPO$ или $\measuredangle MM'P' = \measuredangle M'MP - \measuredangle MOP$ ... (1).

Пусть при неограниченном приближении точки P вдоль линии γ к точке M секущая MP стремится к положению MA, так что MA — касательная к линии γ в точке M. Пусть $\measuredangle M'MA = \varphi$. Тогда $\lim\limits_{P \to M} \measuredangle M'MP = \varphi$. В то же время, когда P стремится к M вдоль линии γ, угол MOP стремится к нулю. Поэтому, в силу равенства (1), угол $MM'P'$ также стремится к определённому пределу, равному φ. Таким образом, когда P стремится к M вдоль линии γ (и, следовательно, P' стремится к M' на линии γ'), секущая $M'P'$ стремится к некоторому предельному положению $M'A'$. $A'M'$ — касательная к γ' в точке M' (по определению касательной). Мы видим, что $\measuredangle MM'A' = \varphi$. Лемма доказана.

Теорема. *Если две линии γ_1 и γ_2 и точка их пересечения M преобразуются в некоторой инверсии соответственно в линии γ_1' и γ_2' и точку M', то угол между линиями γ_1 и γ_2 в точке M равен углу между линиями γ_1' и γ_2' в точке M'.*

Доказательство. Пусть a_1 и a_2 — касательные к γ_1 и γ_2 в точке M, a_1' и a_2' — касательные к γ_1' и γ_2' в точке M' (рис. 152).

Будем предполагать, что ни одна из прямых a_1 и a_2 не совпадает с прямой OM, где O — центр инверсии; в противном случае доказательство только упрощается. Прямой MM' плоскость разбивается на две полуплоскости. Выберем в одной из них на каждой прямой a_1, a_2 и a_1', a_2' по одной точке: A_1 и A_2; A_1' и A_2'. В силу леммы

$$\measuredangle M'MA_1 = \measuredangle MM'A_1' \tag{2}$$

$$\measuredangle M'MA_2 = \measuredangle MM'A_2' \tag{2'}$$

Пусть для определённости $\measuredangle M'MA_2 < \measuredangle M'MA_1$, отсюда $\measuredangle A_2MA_1 = \measuredangle M'MA_1 - \measuredangle M'MA_2$ и $\measuredangle A_2'M'A_1' = \measuredangle MM'A_1' - \measuredangle MM'A_2'$, так что в силу равенств (2) и (2') $\measuredangle A_1'M'A_2' = \measuredangle A_1MA_2$. Теорема доказана.

Следствие. Если две линии касаются в некоторой точке, отличной от центра инверсии, то при инверсии они преобразуются в две линии, которые касаются в соответственной точке.

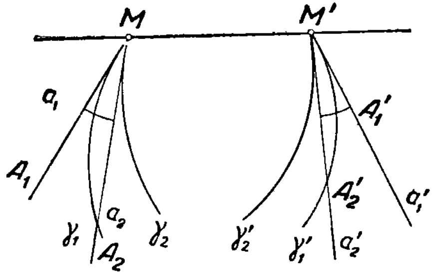

Рис. 152.

Рассмотренную теорему иногда кратко формулируют и так: при инверсии сохраняется угол между двумя линиями. Имея в виду это свойство, говорят, что инверсия является *конформным* (т. е. сохраняющим форму) преобразованием.

На рисунке 152 нетрудно усмотреть, что углы A_1MA_2 и $A_1'M'A_2'$ противоположно ориентированы (чтобы получить эти углы, нужно луч MA_1 вращать *против* часовой стрелки, а луч $M'A_1'$—*по* часовой стрелке). Это обстоятельство носит общий характер: при инверсии сохраняется величина угла, но изменяется его ориентация.

§ 8. Решение задач на построение методом инверсии

Сущность метода инверсии заключается в следующем. Наряду с данными и искомыми фигурами рассматриваем фигуры, инверсные им или их частям. Иногда этого оказывается уже достаточно для нахождения таких связей между искомыми и данными, которые нужны для решения задачи.

В большинстве случаев решение задачи сводится к построению фигуры, инверсной искомой, в предположении, что уже построена фигура, инверсная данной. Эта последняя задача, при удачном выборе базисной окружности, может оказаться проще данной задачи. Построив фигуру, инверсную искомой, затем строят искомую фигуру. Метод инверсии даёт возможность решить ряд наиболее трудных конструктивных задач элементарной геометрии.

Недостатком этого метода является его громоздкость, связанная с необходимостью выполнить большое число построений.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Через две данные точки A и B провести окружность, ортогональную данной окружности $\omega(O, r)$ (рис. 153).

Если примем окружность ω за базисную окружность, то при инверсии искомая окружность γ преобразуется в себя,

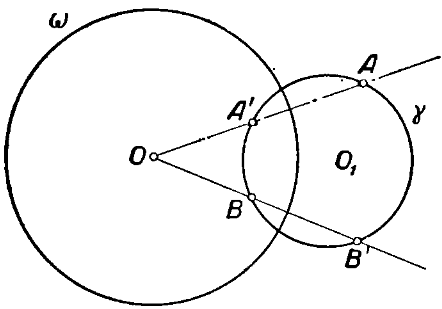

Рис. 153.

а точки A и B перейдут в точки A' и B' на этой окружности. Но окружность γ вполне определяется, если известны три точки на ней, например A, B и A'. Отсюда вытекает построение.

1) Строим точку A', инверсную точке A относительно окружности ω.

2) Строим окружность γ, проходящую через точки A, B и A'. γ — искомая окружность.

Если точка A лежит на окружности ω, то точка A' совпадает с точкой A и указанный путь решения непригоден. В этом случае нужно провести аналогичное построение относительно точки B. Если обе точки A и B лежат на окружности ω, то построение можно выполнить так: через A и B проводим касательные к окружности ω и отмечаем точку их пересечения O_1. O_1 — центр искомой окружности.

Эти построения непригодны, если точки A, B и O расположены на одной прямой. Если при этом точки A и B не инверсны, то задача не имеет решения. Если же точки A и B инверсны относительно окружности ω, то задача имеет бесконечно много решений: любая окружность, проходящая через точки A и B, ортогональна окружности ω (см. § 6).

Пример 2. Даны: точка O и две не проходящие через неё прямые a и b. Провести через точку O такой луч, чтобы произведение его отрезков от точки O до точек пересечения с данными прямыми было равно квадрату данного отрезка.

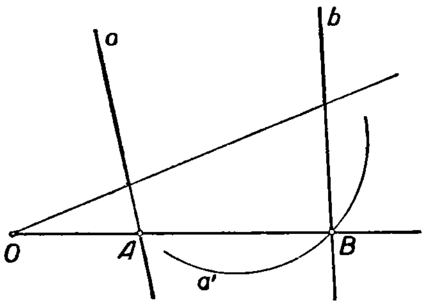

Рис. 154.

Анализ. Пусть O (рис. 154) — данная точка, a и b—данные прямые, OAB—искомый луч, так что $OA \cdot OB = r^2$, где r — данный отрезок.

Инверсия относительно окружности $\omega(O, r)$ переведёт точку A в точку B, а прямую a — в некоторую окружность a', проходящую через точку B. Таким образом, $B \equiv a' \times b$.

Построение. Строим последовательно: 1) окружность $\omega(O, r)$; 2) образ a' прямой a в инверсии относительно ω; 3) точку $B \equiv a' \times b$; 4) луч OB, который и удовлетворяет условию задачи.

Доказательство. Пусть $A \equiv OB \times a$. Тогда A — прообраз точки B в инверсии относительно $\omega(O, r)$, так как прямая a — прообраз окружности a'. Следовательно, по определению инверсии, $OA \cdot OB = r^2$.

Исследование. Возможны следующие случаи:
1) окружность a' пересекает прямую b; два решения;
2) окружность a' касается прямой b; одно решение;
3) окружность a' не имеет общих точек с прямой b; решений нет.

Так как искомая точка B обязательно соответственна точке A в инверсии относительно $\omega(O, r)$, то точка B должна быть общей точкой прямой b и окружности a'. Отсюда следует, что других решений, кроме найденных, задача иметь не может.

Пример 3. Построить окружность, касательную к данной окружности Γ и проходящую через две данные точки A и B вне данной окружности.

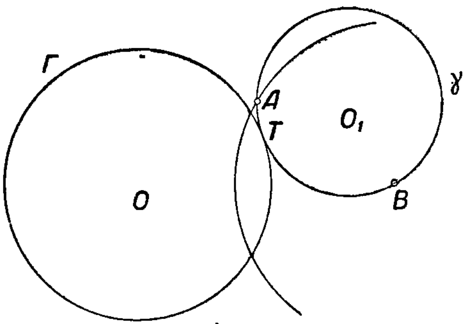

Рис. 155.

Анализ. Пусть γ (рис. 155) — искомая окружность. Желательно преобразовать фигуру так, чтобы окружность γ (или окружность Γ) преобразовалась в прямую. С этой целью примем точку B за центр инверсии, а отрезок BA — за радиус инверсии. Тогда окружность Γ преобразуется в некоторую окружность Γ', точка A преобразуется в себя, искомая окружность γ — в прямую γ'. Прямая γ' должна пройти через точку A' (совпадающую с A), так как окружность γ проходит через точку A, а также касаться окружности Γ', так как окружность γ касается окружности Γ (рис. 156). Таким образом, задача сводится к построению касательной из построенной точки (A') к построенной окружности (Γ').

Построение. Строим последовательно:

1) окружность ω с центром в точке B радиуса BA;

2) окружность Γ', инверсную окружности Γ относительно окружности ω;

3) прямую γ', проходящую через точку A и касающуюся окружности Γ';

4) окружность γ, инверсную прямой γ' относительно окружности ω. Окружность γ искомая.

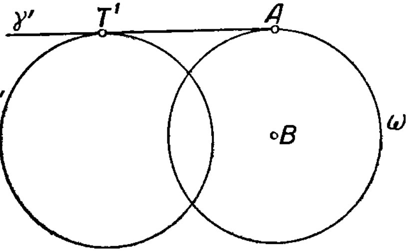

Рис. 156.

Доказательство. Прямая γ' касается окружности Γ', поэтому соответствующая ей окружность γ касается соответственной окружности Γ. Прямая γ' проходит через точку A, и поэтому окружность γ проходит через ту же точку; во всех случаях, когда прямая γ' не проходит через центр инверсии, окружность γ проходит через центр инверсии, т. е. через точку B.

Исследование. Из четырёх шагов построения шаги 1) и 2) всегда выполнимы, притом однозначно. Рассмотрим построение 3).

Проведение касательной к окружности Γ' через точку A зависит от расположения точки A относительно окружности Γ'. Можно допустить три предположения: а) точка A на окружности Γ'; б) точка A внутри окружности Γ'; в) точка A вне окружности Γ'.

Случай а) невозможен, так как из $A' \in \Gamma'$ следовало бы $A \in \Gamma$, что противоречит условию задачи.

Докажем, что случай б) также невозможен. Применим для этого доказательство „от противного". Допустим, что точка A располагается внутри окружности Γ' (рис. 157). Так как точка B, по условию, вне Γ, то B также вне Γ'

(это следует из способа построения окружности Γ'). Поэтому луч BA' встретит окружность Γ' в двух точках, причём одна из них внутри окружности ω, а другая вне её. Обозначим внутреннюю точку пересечения через P', а внешнюю — через Q'. При инверсии точки P', Q' и A' преобразуются в точки P, Q и A, причём Q внутри ω, P вне ω, A на ω, так что A лежит между P и Q. Окружность Γ', проходящая через P' и Q', перейдёт в окружность Γ, проходящую через P и Q. И так как точка A принадлежит хорде PQ окружности Γ, то A внутри Γ, вопреки условию задачи.

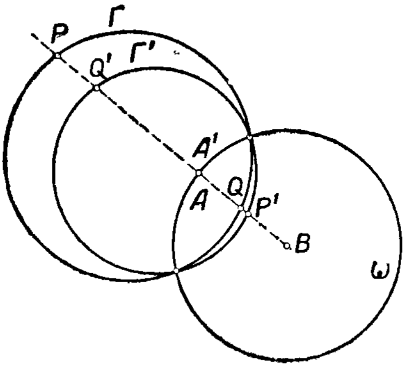

Рис. 157.

Таким образом, возможен лишь случай в), т. е. A вне Γ'. Поэтому из точки A всегда можно провести две касательные к окружности Γ'.

Переходим к четвёртому шагу. При инверсии прямая γ' преобразуется в окружность лишь в том случае, когда эта прямая не проходит через центр инверсии. Если же прямая γ' проходит через точку B, то прямая BA касательна к окружности Γ'. Но при инверсии прямая BA преобразуется в себя, а окружность Γ' — в окружность Γ. Следовательно, если прямая γ' проходит через точку B, то окружность Γ касается прямой BA (и наоборот). В этом последнем случае прямая γ' инвертируется в прямую. Таким образом, приходим к следующему выводу: при данном способе построения мы получаем единственное решение, если прямая AB касается окружности Γ, и два решения во всяком другом случае.

Решая задачу каким-либо иным способом, мы не получим новых решений. В самом деле, если бы задача имела более одного решения в случае, когда AB касается Γ, или более двух решений в любом ином случае, то после инверсии относительно окружности ω оказалось бы, что через точку A' ($A' \equiv A$) проходило бы не менее трёх касательных к окружности Γ', что невозможно.

Заметим, что данную задачу можно решить, принимая за центр инверсии точку на данной окружности Γ. При этом задача сводится к следующей: построить окружность, касающуюся данной прямой и проходящую через две данные точки. Эта задача может быть решена без привлечения метода инверсии (см. гл. II, § 8).

§ 9. Задача Аполлония

Методом инверсии может быть решена в общем случае известная задача Аполлония о касании окружностей:

Построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей.

Эта задача впервые была решена известным греческим геометром Аполлонием Пергским в III в. до н. э. в сочинении, которое до нас не дошло, но о котором упоминают некоторые древние математики (например, Папп). Способ, с помощью которого решил эту задачу Аполлоний, неизвестен. Многие задачи из числа рассматриваемых в школьном курсе геометрии представляют частные или предельные случаи задачи Аполлония. Частные случаи возникают при специальном расположении данных окружностей, предельные — когда все или некоторые из данных окружностей вырождаются в точки (радиус окружности неограниченно уменьшается) или прямые (радиус неограниченно возрастает).

Прежде чем решить задачу Аполлония в общем случае, рассмотрим некоторые частные и предельные её случаи.

Задача 1. Построить окружность, проходящую через три данные точки.

Решение общеизвестно.

Задача 2. Построить окружность, касающуюся трёх данных прямых. Решение этой задачи также общеизвестно. Она может иметь до четырёх решений.

Задача 3. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных параллельных прямых. Решение этой задачи изложено в § 6 гл. II.

Задача 4. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных пересекающихся прямых. (Решение см. [9], гл. III, раздел IV.)

Задача 5. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

Эта задача может быть решена методом инверсии, если за центр инверсии принять одну из данных точек, а её расстояние до данной прямой принять за радиус инверсии. Она может быть решена и без инверсии (см. § 8, гл. 2).

Задача 6. Построить окружность, касающуюся данной окружности и проходящую через две данные точки.

Эту задачу мы решили в предыдущем параграфе в предположении, что данные точки расположены вне данной окружности. В других случаях решение аналогично или ещё проще.

Задача 7. Построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей, проходящих через одну общую точку P.

Если принять общую точку трёх данных окружностей γ_1, γ_2 и γ_3 за центр инверсии, то эти окружности преобразуются в три прямые. Таким образом, задача сводится к построению окружности, касающейся трёх построенных прямых. Искомая окружность — образ этой окружности в данной инверсии.

Переходим к решению задачи Аполлония в общем случае, причём остановимся лишь на основных моментах этого решения, не вникая в отдельные его детали.

Решение, которое мы дадим, основано на предварительном решении двух вспомогательных задач (представляющих предельный и частный случаи общей задачи Аполлония).

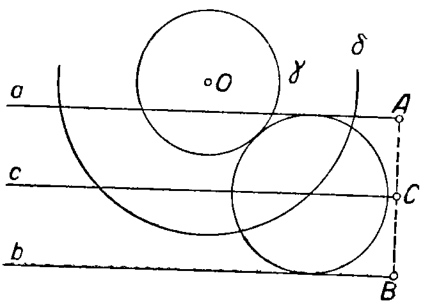

Рис. 158.

1-я вспомогательная задача: построить окружность, касающуюся двух данных параллельных прямых и данной окружности.

Задача обычно решается методом геометрических мест. Пусть a и b — данные прямые, $\gamma(O, r)$ — данная окружность (рис. 158). Из произвольной точки A на прямой a опускаем перпендикуляр AB на прямую b. Через середину C отрезка AB проводим прямую c параллельно a. Строим окружность δ с центром в точке O радиуса $r + AC$ (или радиуса $|r - AC|$). Отмечаем точку пересечения этой окружности с прямой c; это и будет центр искомой окружности.

Эта задача может иметь до четырёх различных решений.

2-я вспомогательная задача: построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей, если две из них взаимно касаются.

Эта задача решается методом инверсии. Пусть γ_1, γ_2 и γ_3 — данные окружности, причём γ_1 и γ_2 касаются в точке T (рис. 159). Примем точку T за центр инверсии, а за радиус инверсии — произвольный отрезок (удобно избрать его так, чтобы базисная окружность ω пересекла окружности γ_1 и γ_2). При инверсии окружности γ_1 и γ_2 преобразуются в пару параллельных прямых γ_1' и γ_2' (см. § 3), а окружность γ_3 — в некоторую окружность (или прямую) γ_3'. Построить окружность γ', касающуюся прямых γ_1' и γ_2' и линии γ_3', мы умеем (см. 1-ю вспомогательную задачу). При инверсии этой окружности она преобразуется в окружность (или прямую) γ, которая будет касаться трёх данных окружностей γ_1, γ_2 и γ_3.

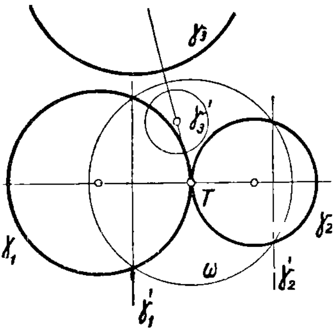

Рис. 159.

Решение задачи Аполлония в общем случае сводится к этой 2-й вспомогательной задаче. Мы воспользуемся для этого приёмом, иногда называемым „методом расширения“.

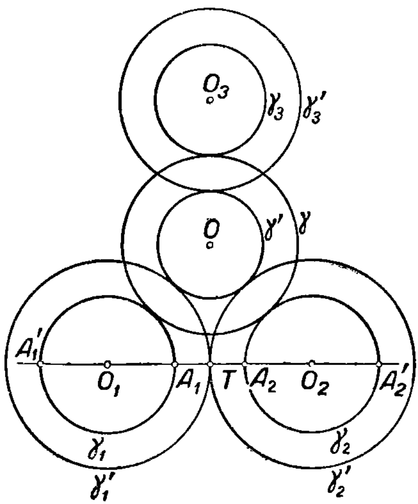

Рис. 160.

Для определённости рассмотрим тот случай, когда каждая из трёх данных окружностей расположена вне двух других (см. рис. 160). В других случаях решение проводится аналогично.

Пусть $\gamma_1(O_1, r_1)$, $\gamma_2(O_2, r_2)$ и $\gamma_3(O_3, r_3)$ — данные окружности. Пусть, далее, прямая O_1O_2 пересекает окружность γ_1 в точках A_1 и A_1', а окружность γ_2 — в точках A_2 и A_2'. Из четырёх отрезков A_1A_2, $A_1'A_2'$, $A_1'A_2$ и A_1A_2' выберем кратчайший. Пусть это будет отрезок A_1A_2. Обозначим через T его середину. Увеличим радиусы всех данных окружностей на отрезок A_1T, т. е. построим окружности $\gamma_1'(O_1, r_1+A_1T)$, $\gamma_2'(O_2, r_2+A_1T)$, $\gamma_3'(O_3, r_3+A_1T)$. Из них окружности γ_1' и γ_2' касаются в точке T. Мы можем теперь построить окружность γ', касающуюся трёх окружностей γ_1', γ_2' и γ_3' (см. 2-ю вспомогательную задачу). Обозначим центр окружности γ' через O, а радиус — через r'. Если затем построить концентрическую ей окружность $\gamma(O, r'+A_1T)$, то эта последняя будет касаться трёх данных окружностей.

Число всех возможных решений задачи Аполлония зависит от взаимного расположения данных окружностей. Приведём без доказательства несколько примеров.

1. Если окружность γ_2 расположена внутри окружности γ_1, а окружность γ_3 вне окружности γ_1 (рис. 161), то задача Аполлония вовсе не имеет решения. Это относится,

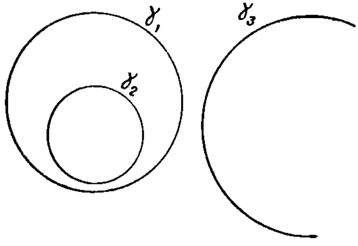

Рис. 161.

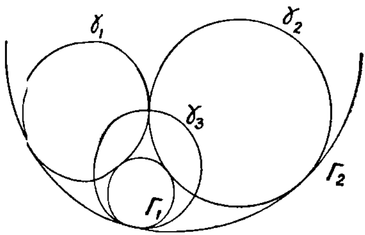

Рис. 162.

в частности, и к случаю, когда все три данные окружности концентрические.

2. Если две окружности γ_1 и γ_2 касаются, а третья окружность γ_3 пересекает их в точке их касания, то задача Аполлония имеет два решения Γ_1 и Γ_2 (рис. 162).

3. Если каждая из данных окружностей расположена вне двух других, причём касательная к каждым двум из данных окружностей не имеет общей точки с третьей окружностью, то задача имеет восемь решений (рис. 163).

4. Если все три данные окружности попарно касаются в одной точке, то можно провести бесконечно много окружностей, касающихся каждой из данных (см. рис. 164).

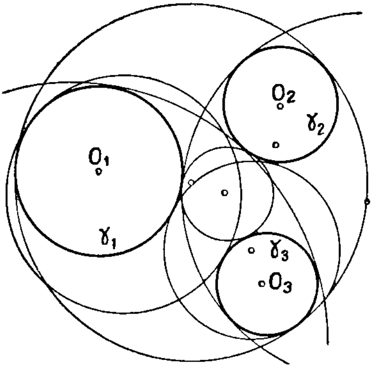

Рис. 163.

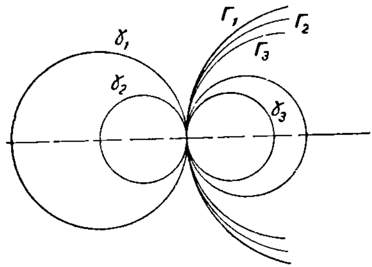

Рис. 164.

Полное исследование показывает, что если задача Аполлония имеет лишь конечное число решений, то их не более восьми.

§ 10. Инверсия и осевая симметрия

Можно установить далеко идущую аналогию в свойствах инверсии и осевой симметрии. Для этого напомним некоторые свойства инверсии.

1. Инверсия сохраняет угол пересечения двух линий, меняя при этом его ориентацию.

2. Прямая, ортогональная базисной окружности, преобразуется в себя.

3. Базисная окружность инверсии преобразуется в себя.

4. Всякая окружность, ортогональная базисной, преобразуется в себя.

5. Всякая окружность или прямая преобразуется в окружность или прямую.

6. Две точки тогда и только тогда инверсны относительно некоторой базисной окружности, если они являются вершинами пучка окружностей, ортогональных к базисной.

Если в этих предложениях слово „инверсия" заменить словами „осевая симметрия", выражение „базисная окружность" — через „ось симметрии" и „инверсные точки" — через „симметричные точки", то получим свойства осевой симметрии.

Покажем, что в известном смысле осевую симметрию можно рассматривать как предельный случай инверсии.

Пусть базисная окружность инверсии $\omega(O, r)$ проходит через точку A (рис. 165), так что $OA = r$. Обозначим через a касательную к окружности ω в точке A. Пусть, далее, P — некоторая данная точка, а P' — инверсная ей точка относительно окружности ω. Представим себе, что центр инверсии неограниченно удаляется от точки A вдоль луча AO, так что радиус инверсии OA неограниченно возрастает.

В известном смысле можно говорить, что при этом окружность $\omega(O, r)$ неограниченно приближается к прямой a, „вырождается" в эту прямую *. Оказывается, что при этом точка P' будет перемещаться по плоскости, неограниченно приближаясь к точке P_1, симметричной с точкой P относительно прямой a. Докажем это.

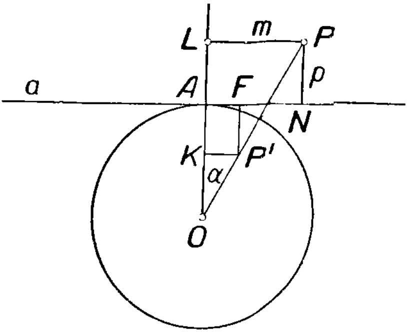

Рис. 165.

Для определённости положим, что точка P и точка O лежат по разные стороны от прямой a (рис. 165). Опустим из точки P перпендикуляр PN на прямую a и перпендикуляр PL на прямую OA. Пусть $PN = p$, $PL = m$. Из точки P', инверсной точке P относительно окружности $\omega(O, r)$, также опустим перпендикуляры $P'F$ и $P'K$ на прямые a и OA. Нам нужно показать, что $P'F \to p$ и $P'K \to m$, если $r \to \infty$. Действительно,

$$P'F = KA = r - OP' \cos\alpha = r - \frac{r^2}{OP}\cos\alpha = r - \frac{r^2\cos^2\alpha}{OP\cos\alpha} =$$

$$= r - \frac{r^2\cos^2\alpha}{r+p} = \frac{pr + r^2\sin^2\alpha}{r+p}.$$

Но

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{r+p},$$

и поэтому

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha} = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(\frac{r+p}{m}\right)^2} = \frac{m^2}{m^2+(r+p)^2}.$$

---

* Уясним себе точный смысл этого выражения. Назовём точку M „предельной" для совокупности окружностей $\omega(O, r)$, касающихся прямой a в точке A, если для любой сколь угодно малой окрестности точки M можно указать такой отрезок d, что все окружности радиуса, большего d, имеют в этой окрестности хотя бы одну точку. Совокупность всех предельных точек для окружностей $\omega(O, r)$ образует прямую a.

Следовательно,

$$P'F=\frac{pr+\dfrac{r^2m^2}{m^2+(r+p)^2}}{r+p}=\frac{p+\dfrac{m^2}{\left[\dfrac{m^2}{r^2}+\left(1+\dfrac{p}{r}\right)^2\right]r}}{1+\dfrac{p}{r}}.$$

Отсюда видно, что $P'F\to p$, когда $r\to\infty$. С другой стороны,

$$P'K=OP'\cdot\sin\alpha=\frac{r^2\sin^2\alpha}{OP\sin\alpha}=\frac{r^2}{m}\cdot\frac{m^2}{m^2+(r+p)^2}=\frac{m}{\dfrac{m^2}{r^2}+\left(1+\dfrac{p}{r}\right)^2}.$$

Отсюда ясно, что $P'K\to m$, когда $r\to\infty$.

Изложенные здесь соображения показывают, что целесообразно расширить понятие об инверсии так, чтобы можно было рассматривать осевую симметрию как специальный случай инверсии. Для этого условимся называть „окружностью в широком смысле слова“ любую окружность и любую прямую. Тогда можно оба преобразования — инверсию и симметрию относительно прямой — объединить в одно понятие с помощью следующего определения. Точка P' называется *обратной* точке P (или *сопряжённой* точке P) относительно окружности (в широком смысле) ω, если точки P и P' являются вершинами пучка окружностей. ортогональных к ω. Такое преобразование, при котором каждой точке P сопоставляется сопряжённая ей точка P' относительно окружности (в широком смысле) ω, назовём *отражением* от окружности ω. В том случае, когда ω является окружностью в узком (обычном) смысле, наше преобразование представляет инверсию относительно ω. Если же ω — прямая, то рассматриваемое преобразование является симметрией относительно этой прямой.

§ 11. Инверсор

Существуют приборы, с помощью которых можно без всяких вычислений и без привлечения обычных инструментов геометрических построений вычертить линию, инверсную любой данной линии. Такие приборы называются *инверсорами*.

Впервые инверсор был предложен французским капитаном Поселье в 1864 г. Этот прибор получил известность только через семь лет, когда он был независимо от Поселье изобретён петербургским студентом Липкиным, видимо, под влиянием идей П. Л. Чебышева.

„Клетка Поселье“, как принято называть этот инверсор, состоит из шести стержней, связанных шарнирами (рис. 166). Четыре из них составляют ромб $PAQB$. Остальные два стержня равны между собой, но каждый из них длиннее стороны ромба $PAQB$, Обозначим PA через a, OA через l, а разность l^2-a^2 через R^2. Предположим, что точка O закреплена на плоскости. Тогда при любом положении точки P на плоскости точка Q будет ей инверсна относительно окружности $\omega(O, R)$. В самом деле: 1) P и Q лежат на одном луче, исходящем из точки O, и 2) $OP\cdot OQ=(OC-PC)(OC+PC)=$ $=OC^2-PC^2=(l^2-AC^2)-(a^2-AC^2)=l^2-a^2=R^2$.

Когда точка P описывает какую-либо линию γ, точка Q описывает инверсную ей линию γ'. В частности, когда P описывает окружность, проходящую через точку O, точка Q опишет прямую. Таким образом, инверсор Поселье позволяет преобразовать вращательное движение в прямолинейное. Если нужно преобразовать в инверсии окружность радиуса r, то к инверсору в точке P шарнирно присоединяется стержень MP длины r. Если точки O и M закреплены неподвижно так, что стержни OA и OB могут вращаться около точки O, а стержень MP — около точки M (см. рис. 167), то точка P опишет дугу

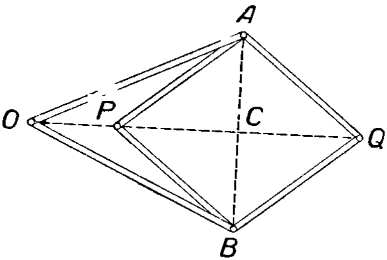

Рис. 166.

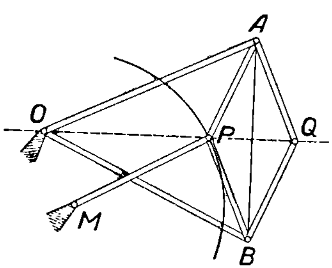

Рис. 167.

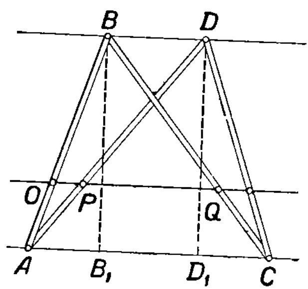

Рис. 168.

некоторой окружности, а точка Q—дугу инверсной ей окружности или прямолинейный отрезок (в случае, если $OM=MP$).

Инверсор Гарта. Пусть четыре стержня связаны шарнирно так, как указано на рисунке 168. Узлы A, B, C

и D являются здесь вершинами равнобочной трапеции, причём $AB = CD = d$, $AD = CB = l$. Пусть O, P и Q три точки на этих стержнях, причём $AO : OB = AP : PD = CQ : QB$. Нетрудно проверить, что в таком случае точки O, P и Q лежат на одной прямой, параллельной основанию трапеции $ACDB$. Предположим, что точка O закреплена на плоскости, а четыре стержня как-то расположены на этой плоскости. Оказывается, что при любом расположении механизма произведение $OP \cdot OQ$ постоянно.

Покажем это. Обозначим $AO : AB$ через c_1, $OB : AB$ через c_2; отсюда $OP : BD = c_1$, $OQ : AC = c_2$.

Поэтому $OP \cdot OQ = c_1 \cdot c_2 \cdot BD \cdot AC$.

Опустим из B и D перпендикуляры BB_1 и DD_1 на AC. Тогда

$$AC \cdot BD = AC \cdot B_1D_1 = (AD_1 + D_1C) \cdot (AD_1 - AB_1) =$$
$$= (AD_1 + D_1C) \cdot (AD_1 - D_1C) = AD_1^2 - D_1C^2 =$$
$$= (AD^2 - D_1D^2) - (CD^2 - DD_1^2) = AD^2 - CD^2 = l^2 - d^2.$$

Поэтому $OP \cdot OQ = c_1 \cdot c_2 \cdot (l^2 - d^2)$. Обозначим $c_1 \cdot c_2 \times (l^2 - d^2)$ через r^2. Тогда $OP \cdot OQ = r^2$, так что точки P и Q инверсны относительно окружности $\omega(O, r)$. Когда точка P опишет какую-либо линию, точка Q опишет инверсную ей линию. В частности, если точка P будет перемещаться по окружности, проходящей через точку O, инверсная ей точка Q будет перемещаться по прямой.

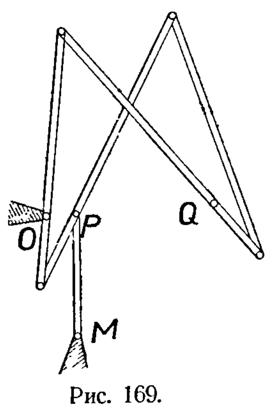

Рис. 169.

Для удобства инверсного преобразования окружности, проходящей через центр инверсии, присоединяют к четырём рассмотренным стержням ещё один стержень MP, который шарнирно связан со стержнем AD в точке P и может вращаться около неподвижной точки M, причём $MP = MO$. Расположение стержней в механизме видно из рисунка 169.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Дайте определение инверсии и перечислите её простейшие свойства.
2. Как строится точка, инверсная данной?

3. Во что преобразуется окружность при инверсии?
4. Во что преобразуется прямая при инверсии?
5. Какие окружности преобразуются в себя при инверсии?
6. Сформулируйте лемму об антипараллельных прямых.
7. Почему инверсия относится к числу конформных преобразований?
8. В чём сущность метода инверсии при решении геометрических задач на построение?
9. Сформулируйте задачу Аполлония. Каков план её решения в общем случае?
10. Сколько решений может иметь задача Аполлония?
11. Приведите примеры предельных и частных случаев задачи Аполлония.
12. Укажите, в чём сходство между инверсией и осевой симметрией.

ЗАДАЧИ

1. Из двух инверсных точек какая ближе к базисной окружности: внешняя или внутренняя? Почему?
2. Во что при инверсии преобразуется окружность, концентрическая базисной?
3. Доказать: если при инверсии окружность Γ, не концентрическая базисной, преобразуется в окружность Γ', то центр данной окружности Γ не преобразуется в центр преобразованной окружности Γ'.

Указание. Рассмотреть два случая: когда центр инверсии внутри и когда вне данной окружности.

4. Если центр инверсии лежит вне данной окружности, то точка, инверсная центру данной окружности, ближе к центру инверсии, чем центр преобразованной окружности. Доказать.
5. Во что при инверсии преобразуется луч? Рассмотреть все возможные случаи.
6. Точка описывает хорду базисной окружности, отличную от диаметра. Какую линию опишет при этом инверсная точка?
7. Точка описывает некоторую окружность, не проходящую через центр инверсии, против часовой стрелки. Выяснить, в каком случае инверсная ей точка опишет соответствующую окружность против часовой стрелки, а в каком по часовой стрелке.
8. Во что при инверсии преобразуется сектор базисной окружности?
9. Во что при инверсии преобразуется круг, окружность которого не проходит через центр инверсии?

Указание. Рассмотреть два случая: когда центр инверсии вне данного круга и когда центр инверсии внутри данного круга.

10. Зная радиус инверсии, расстояния двух точек A и B от центра инверсии и расстояние AB, вычислить расстояние между точками A' и B' соответственно инверсными точкам A и B.
11. Отношение $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ называется двойным отношением четырёх точек A, B, C и D и обозначается $ABCD$. Доказать, что двойное отношение четырёх точек является инвариантом инверсии, т. е. что двойное отношение четырёх данных точек равно двойному отношению соответственно инверсных им точек,

Указание. Воспользоваться леммой об антипараллельных прямых.

12. Доказать теорему Птолемея: в выпуклом четырёхугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

Указание. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, вписанный в окружность. Рассмотрите преобразование этого четырёхугольника в инверсии, центр которой расположен в одной из его вершин; воспользуйтесь задачей 10.

13. Дать полные решения частных и предельных случаев задачи Аполлония, упомянутых в § 9 настоящей главы.

14. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.

15. Пользуясь методом расширения, свести решение задачи Аполлония к случаю, указанному в задаче 14.

16. Через данную точку провести окружность, ортогональную к двум заданным окружностям.

17. Через данную точку провести окружность, пересекающую две данные прямые под данными углами.

18. Построить окружность, проходящую через данную точку и пересекающую две данные окружности под данными углами.

19. Даны три окружности, из которых две ортогональны третьей. Построить окружность, ортогональную ко всем трём данным окружностям.

Глава VI

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД

§ 1. Постановка задачи о построении отрезка, заданного формулой

В целом ряде случаев приходится решать следующую задачу.

Даны отрезки $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ..., $\bar{l}$; a, b, c, ..., l — их длины при некоторой избранной единице измерения. Требуется построить с помощью данных инструментов отрезок $\bar{y}$, длина которого y при той же единице измерения выражается через длины a, b, c, ..., l данных отрезков заданной формулой:

$$y = f(a, b, c, \ldots, l).$$

Мы говорим в этих случаях кратко, что строим выражение $f(a, b, c, \ldots, l)$. В качестве данных инструментов будем в этой главе принимать циркуль и линейку. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что функция $f(a, b, c, \ldots, l)$, задающая длину искомого отрезка через длины данных отрезков, рассматривается для таких значений положительных аргументов, при которых она имеет смысл и положительна.

Чтобы различить отрезок и его длину, мы будем обозначать отрезки строчными буквами с чертой сверху ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ..., $\bar{l}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$, ...), а их длины — теми же буквами без черты (a, b, c, ..., l, x, y, ...).

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Дан отрезок, принимаемый за единичный. Требуется построить отрезок, длина которого была бы равна числу $y = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Может показаться, что для построения искомого отрезка необходимо представить y в виде десятичной дроби (а его лишь приближённо можно представить в виде

конечной десятичной дроби) и затем отложить на прямой соответствующее число раз единичный отрезок, его десятые, сотые и т. д. доли. Однако существует совершенно иной способ, позволяющий построить искомый отрезок с помощью циркуля и линейки без всяких вычислений, притом не приближённо, а точно. Такой способ построения будет установлен ниже.

2. Пусть требуется построить несколько точек графика функции $y=\sqrt[4]{x}$. Например, надо построить на плоскости точку $x=5$, $y=\sqrt[4]{5}$. Может показаться, что для этого необходимо вычислить y приближённо и затем отложить на перпендикуляре к оси абсцисс в точке $x=5$ от этой точки последовательно целые, десятые, сотые и т. д. доли найденного приближённого значения корня. Очевидно, что таким образом мы действительно можем получить точку, ордината которой приблизительно равна $\sqrt[4]{5}$. Но можно построить отрезок длиной $\sqrt[4]{5}$ без вычислений такого рода, притом теоретически абсолютно точно. О том, как это делается, скажем ниже.

3. Имеется два отрезка $\overline{a}$ и $\overline{b}$, причём длины их равны соответственно 6,8 и 3,7. Требуется построить отрезок $\overline{y}$, длина которого определяется формулой $y=\sqrt[4]{a^4-b^4}$. Мы увидим ниже, что для построения такого отрезка циркулем и линейкой вовсе не нужно ни возводить числа $a=6{,}8$ и $b=3{,}7$ в четвёртую степень, ни извлекать корень из разности этих степеней: всё это сделают циркуль и линейка.

Построение не усложнится, если a и b являются и более сложными для вычисления числами или даже не известны длины данных (начерченных) отрезков $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

§ 2. Построение отрезков, заданных простейшими формулами

В школьном курсе геометрии в разделе „Приложение алгебры к геометрии“ на основании метрических соотношений в треугольнике и круге даются способы для построения циркулем и линейкой отрезков, заданных простейшими формулами. Напомним построение отрезков по основным формулам.

1. $x = a + b$. Построение ясно из рисунка 170.

2. $x = a - b\,(a > b)$. Построение см. на рисунке 171.

3. $x = na$, где n — натуральное число. Сводится к построению 1. На рисунке 172 построен отрезок $\overline{x}$ такой, что

$$x = 6a.$$

4. $x = \frac{a}{n}$.

Строим луч, выходящий из какого-либо конца O данного отрезка $\overline{a}$ под произвольным углом к нему. Откладываем

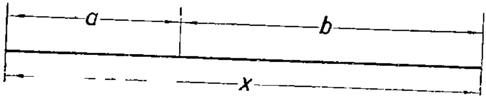

Рис. 170.

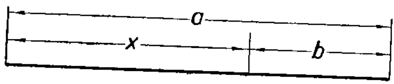

Рис. 171.

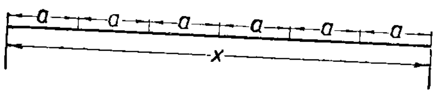

Рис. 172.

на этом луче n раз произвольный отрезок $\overline{b}$, так что $OB = nb$ (рис. 173). Соединяем точку B со вторым концом A отрезка $\overline{a}$. Через точку B_1, определяемую условием $OB_1 = b$, проводим прямую, параллельную AB, и отмечаем точку A_1, в которой она пересечёт отрезок $\overline{a}$.

$$x = OA_1.$$

5. $x = \frac{n}{m}a$ (n и m — данные натуральные числа).

Первый способ. Разделим отрезок $\overline{a}$ на m равных частей (см. построение 4) и увеличим полученный отрезок в n раз (см. построение 3).

Второй способ. Пусть $OA = a$. На произвольном луче, исходящем из точки O (рис. 174), откладываем отрезок $OB_1 = mb$ и отрезок $OB = nb$. Через точку B_1 проводим отрезок B_1A_1, параллельный BA. Тогда $OA_1 = \frac{m}{n}a$.

6. $x = \frac{ab}{c}$ (построение отрезка, четвёртого пропорционального трём данным отрезкам).

Запишем условие в виде пропорции: $c : a = b : x$. Пусть (рис. 175) $OA = a$, $OC = c$, так что члены одного из отно-

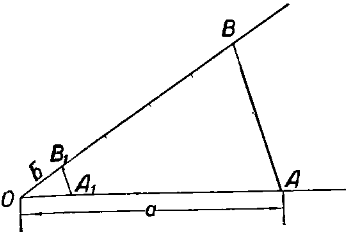

Рис. 173.

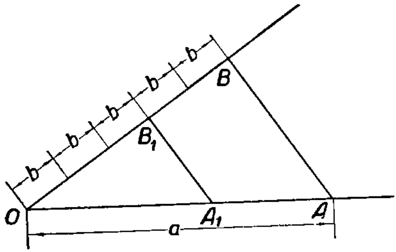

Рис. 174.

шений отложены на одном луче, исходящем из точки O. На другом луче, исходящем из той же точки, откладываем известный член другого отношения $OB = b$. Через точку A проводим прямую, параллельную BC, и отмечаем точку X

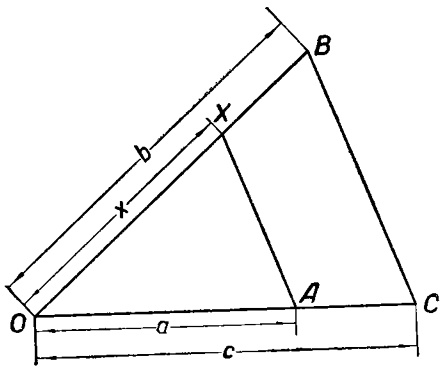

Рис. 175.

её пересечения с прямой OB. Отрезок OX искомый, т. е. $OX = x$.

7. $x = \frac{a^2}{c}$.

Первый способ. Воспользоваться построением 6, полагая $b = a$.

Второй способ (применимый, если $a < c$). Строим (рис. 176) полуокружность с диаметром $AB = c$, хорду $AC = a$, перпендикуляр CD к AB. Тогда $AD = x$.

8. $x = \sqrt{ab}$ (построение среднего пропорционального двух данных отрезков).

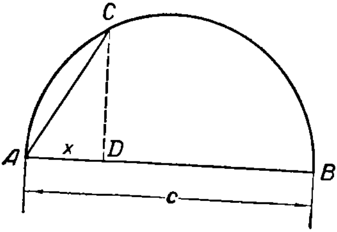

Рис. 176.

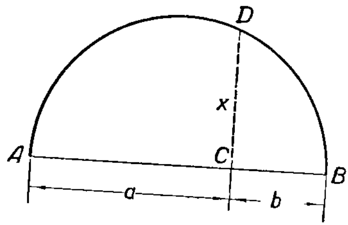

Рис. 177.

Первый способ. Строим отрезки $AC = a$, $CB = b$, так что $AB = a + b$. На AB, как на диаметре, строим полуокружность (рис. 177). В точке C восставляем перпендикуляр к AB и отмечаем точку D его пересечения с окружностью. Тогда $x = CD$.

Второй способ (для $a > b$). Строим окружность диаметром $MN = a$, на $\overline{MN}$ откладываем отрезок $MK = b$ (рис. 178). В точке K восставляем перпендикуляр к $\overline{MN}$ и

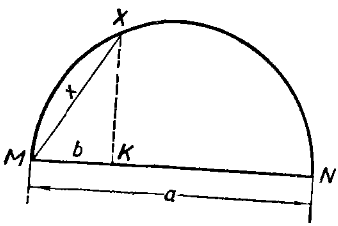

Рис. 178.

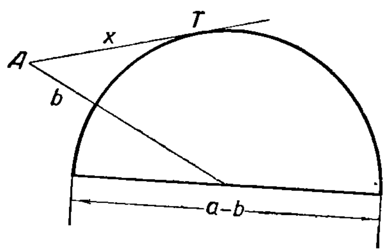

Рис. 179.

отмечаем точку X его пересечения с окружностью. Хорда $MX = x$.

Третий способ (для $a > b$). Строим окружность диаметра $a - b$ (рис. 179), через центр проводим секущую и откладываем на ней внешнюю часть, равную b. Из полученной точки A проводим касательную AT, $x = AT$.

9. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Отрезок $\bar{x}$ строится как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b (рис. 180).

10. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a > b)$. Отрезок $\bar{x}$ строится как катет прямоугольного треугольника с гипотенузой a и катетом b (рис. 181).

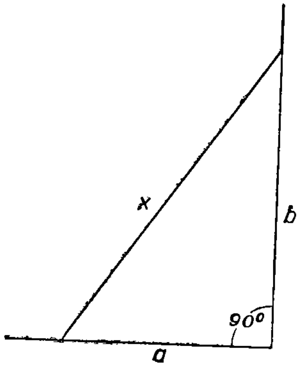

Рис. 180.

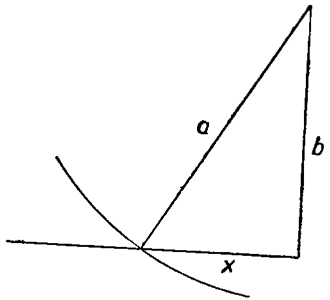

Рис 181.

К рассмотренным построениям можно свести построение отрезков, заданных более сложными формулами. Приведём некоторые примеры.

Пример 1. $x = a\sqrt{n}$, где n — натуральное число. Если $n = pq$, где p и q — натуральные числа, то $x = \sqrt{(pa)(qa)}$ и задача сводится к построению 8.

Если $n = p^2 + q^2$, то $x = \sqrt{(pa)^2 + (qa)^2}$ и задача сводится к построению 9.

Аналогично, если $n = p^2 - q^2$, то задача сводится к построению 10.

Пример 2. $x = a\sqrt{\frac{p}{q}}$, p и q — натуральные числа.

Можно записать: $x = \sqrt{(pa)\cdot\left(\frac{a}{q}\right)}$, и поэтому задача сводится к построениям 5 и 8.

Пример 3. $x = \frac{abc}{de}$.

Строим сначала $\bar{y}$ по формуле $y = \frac{ab}{d}$, затем $\bar{x}$ по формуле $x = \frac{cy}{e}$ (см. постр. 6).

12 Зак. 1678.

Пример 4. $x=\frac{a^4}{b^3}$.

Строим выражение $y=\frac{a^2}{b}$ (см. постр. 7), а затем $x=\frac{y^2}{b}$.

Пример 5. $x=\sqrt{a^2-b^2-c^2+d^2}$ $(a^2+d^2>b^2+c^2)$. Строим последовательно отрезки $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{x}$ по формулам:

$$y=\sqrt{a^2+d^2},\quad z=\sqrt{b^2+c^2},\quad x=\sqrt{y^2-z^2}.$$

Пример 6. $x=\frac{a^4+b^4}{a^3-b^3+c^3}$ $(a^3+c^3>b^3)$.

Перепишем заданное выражение так: $x=\frac{a+\frac{b^4}{a^3}}{a-\frac{b^3}{a^2}+\frac{c^3}{a^2}}\cdot a$.

Строим теперь отрезки $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{x}$ по формулам: $y=a+\frac{b^4}{a^3}$ (см. пример 4), $z=a-\frac{b^3}{a^2}+\frac{c^3}{a^2}$ (см. пример 3).

$$x=\frac{ay}{z}.$$

Пример 7. $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}$ $(a>b)$.

Ясно, что $x=\sqrt{\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$. Строим отрезки $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{x}$ по формулам: $y=\sqrt{a^2-b^2}$ (постр. 10), $z=\sqrt{a^2+b^2}$ (постр. 9), $x=\sqrt{yz}$ (постр. 8).

§ 3. Построение корней квадратных уравнений

Пусть имеются два отрезка $\bar{p}$ и $\bar{q}$. Длины их p и q. Можно дать правила, позволяющие построить *без вычислений* отрезки, длины которых в точности равны действительным корням квадратных уравнений $x^2\pm px\pm q^2=0$, точнее — абсолютным величинам этих корней. Свободный член записываем здесь в виде q^2 (а не q), так как в таком случае равенству $x^2\pm px\pm q^2=0$ можно придать простой геометрический смысл, рассматривая это равенство как соотношение между площадями двух квадратов (x^2 и q^2) и прямоугольника (px).

Для решения поставленной задачи можно воспользоваться либо формулами корней квадратного уравнения, либо формулами Виета. Рассмотрим оба способа.

Первый способ.

1) Для уравнения $x^2 - px + q^2 = 0$.

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}, \quad x_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}.$$

Строим прямоугольный треугольник с гипотенузой $OA = \frac{p}{2}$ и катетом $AC = q$ (рис. 182). Строим окружность $\omega(O, OC)$. Проводим прямую AO до пересечения её с окружностью ω в точках D_1 и $D_2 (AD_1 > AD_2)$. Легко понять, что $x_1 = AD_1$, $x_2 = AD_2$.

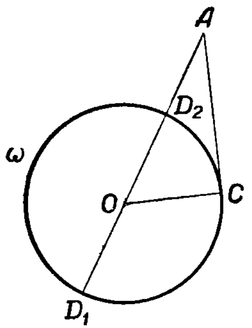

Рис. 182.

2) Для уравнения $x^2 - px - q^2 = 0$.

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q^2},$$

$$x_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q^2}.$$

Строим последовательно: прямоугольный треугольник OCA с катетами $OC = \frac{p}{2}$, $CA = q$ (рис. 182), окружность $\omega\left(O, \frac{p}{2}\right)$, прямую AO. Отмечаем точки D_1 и D_2 её пересечения с окружностью ω. Легко проверить, что $x_1 = AD_1$, $|x_2| = AD_2$.

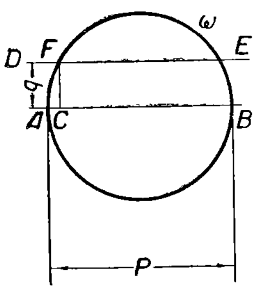

Рис. 183.

Решение уравнения вида $x^2 + px \pm \pm q^2 = 0$ сводится к решению уравнения одного из рассмотренных видов с помощью подстановки $x = -y$.

Второй способ (с помощью формул Виета).

1) Уравнение вида $x^2 - px + q^2 = 0$. Корни этого уравнения x_1 и x_2 связаны формулами: $x_1 + x_2 = p$, $x_1 x_2 = q^2$. Задача сводится поэтому к построению двух отрезков по их сумме и среднему геометрическому между ними. Строим последовательно (см. рис. 183): окружность ω с диаметром $AB = p$, прямую DE, параллельную диаметру AB и отстоящую от него на расстоянии q, точку F пересечения или касания этой прямой с окружностью ω (если такая точка существует), перпендикуляр FC к диаметру AB. Полагая

$x_1 = AC$, $x_2 = BC$, убедимся, что эти числа удовлетворяют обоим соотношениям Виета, а следовательно, и данному уравнению.

Заметим, что прямая DE пересечёт окружность ω лишь тогда, когда $q < \frac{p}{2}$. В этом случае задача имеет два различных решения. Если прямая DE коснётся окружности ω, то $AC = BC$, т. е. $x_1 = x_2$, уравнение имеет два равных действительных корня; при этом $q = \frac{p}{2}$. Наконец, если прямая DE не имеет общих точек с окружностью ω, то $q > \frac{p}{2}$ и данное уравнение не имеет действительных корней.

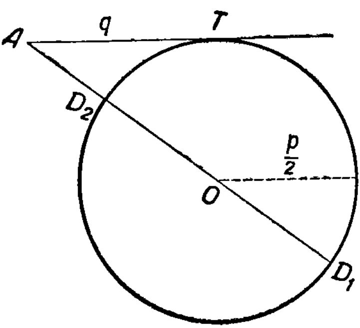

Рис. 184.

2) Корни уравнения вида $x^2 - px - q^2 = 0$ связаны условиями: $x_1 + x_2 = p$, $x_1x_2 = -q^2$. Отсюда видно, что один корень положительный (пусть это будет x_1), а второй (т. е. x_2) отрицательный. Таким образом,

$$x_1 = |x_1|, \quad x_2 = -|x_2|.$$

Поэтому $x_1 - |x_2| = p$, $x_1 \cdot |x_2| = q^2$.

Задача сводится к построению двух отрезков по их разности и среднему геометрическому.

Строим последовательно (рис. 184): окружность $\omega\left(O, \frac{p}{2}\right)$; касательную к ней в произвольной точке T; точку A на касательной, такую, что $TA = q$; прямую OA. Пусть D_1 и D_2 — точки пересечения прямой OA с окружностью ω и $AD_1 > AD_2$. Нетрудно проверить, что $x_1 = AD_1$, $|x_2| = AD_2$.

§ 4. Понятие об однородных функциях

Прежде чем остановиться на общих приёмах построения алгебраических выражений и на выделении широких классов выражений, которые можно построить циркулем и линейкой, нам нужно будет рассмотреть понятие однородной функции. Начнём с примеров.

Рассмотрим три функции:

1) $y=a^2+2b$; 2) $y=\frac{(a^2+b^2)^2}{a^3}$; 3) $y=\sqrt[3]{a^6-b^6+abc^4}$.

Подставим в эти формулы вместо букв a, b, c соответственно ka, kb и kc, где k — произвольное положительное число. Тогда получим:

в 1-м случае $(ka)^2+2kb=k(ka^2+2b)$,

во 2-м случае $\frac{[(ka)^2+(kb)^2]^2}{(ka)^3}=k\frac{(a^2+b^2)^2}{a^3}$,

в 3-м случае

$$\sqrt[3]{(ka)^6-(kb)^6+(ka)(kb)(kc)^4}=k^2\sqrt[3]{a^6-b^6+abc^4}.$$

Мы замечаем, что во 2-м и 3-м случаях произведённая подстановка равносильна умножению функции на некоторую степень числа k, именно: во 2-м случае — на k, в 3-м — на k^2. Функция же 1) этим свойством не обладает. Функции 2) и 3) будем относить к классу *однородных*, а функцию 1) — к классу *неоднородных*.

Определение. Функцию $y=F(a, b, c, \ldots, l)$ будем называть *однородной измерения n*, если при любом положительном значении числа k замена всех аргументов a, b, ..., l соответственно на ka, kb, kc, ..., kl равносильна умножению всей функции на k^n. Иными словами, однородная функция должна удовлетворять равенству:

$F(ka, kb, kc, \ldots, kl)=k^n F(a, b, c, \ldots, l)$ при всех положительных значениях k.

В приведённых примерах функция 2) — однородная 1-го измерения, функция 3) — однородная 2-го измерения, функция 1) не является однородной.

Функция $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ представляет пример однородной функции нулевого измерения, а функция $\frac{a^3}{b^4+c^4}$ — однородная измерения (— 1).

§ 5. О построении некоторых однородных выражений циркулем и линейкой

Пользуясь понятием однородной функции, нетрудно выделить некоторые классы алгебраических выражений, которые могут быть построены циркулем и линейкой. Построение этих выражений производится с помощью основных построений, рассмотренных в § 2.

1. С помощью циркуля и линейки можно строить однородные алгебраические выражения 1-го измерения, которые образованы из длин данных отрезков исключительно с помощью действий умножения и деления. Общий вид такого выражения: $x=\frac{a_1a_2\ldots a_n}{b_1b_2\ldots b_{n-1}}$, где a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_{n-1} — длины данных отрезков.

Задача сводится к последовательному выполнению построений по формулам

$$x_1=\frac{a_1a_2}{b_1},\quad x_2=\frac{x_1a_3}{b_2},\quad \ldots,\quad x_{n-2}=\frac{x_{n-3}a_{n-1}}{b_{n-2}},\quad x=\frac{x_{n-2}a_n}{b_{n-1}},$$

т. е. к построениям четвёртых пропорциональных отрезков (§ 2, п. 6).

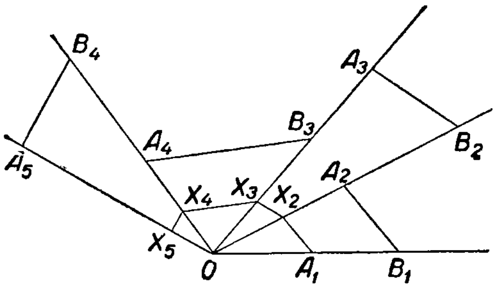

Рис. 185.

Это построение удобно осуществить следующим образом (рис. 185): из произвольной точки O проводим n лучей; на каждом луче строим две точки A_k и B_k так, чтобы

$$OA_k=a_k,\quad OB_k=b_k\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

На последнем луче откладываем $OA_n=a_n$. Строим затем отрезки B_1A_2, B_2A_3, ..., $B_{n-1}A_n$. Наконец, проводим ломаную $A_1X_2X_3\ldots X_n$, такую, что точка X_k ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) лежит на луче OA_k и отрезок $X_{k-1}X_k$ параллелен $B_{k-1}A_k$. Тогда $x=OX$ $\left(\text{на рис. 185 построен отрезок } x=\frac{a_1a_2\ldots a_5}{b_1b_2b_3b_4}\right)$.

В частности, всегда можно построить циркулем и линейкой отрезки, заданные формулами вида

$$x=\frac{a^n}{b^{n-1}}\quad \text{и}\quad x=\frac{a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_k^{\alpha_k}}{b^{n-1}}\ (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=n).$$

2. Пусть $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots, \overline{l}$ — данные отрезки $P_{n+1}(a, b, c, \ldots, l)$ и $P_n(a, b, \ldots, l)$ — однородные многочлены (с рациональными коэффициентами) от $a, b, \ldots, l$ измерения соответственно $n+1$ и n. Циркулем и линейкой можно построить отрезок заданный формулой

$$x = \frac{P_{n+1}(a, b, \ldots, l)}{P_n(a, b, \ldots, l)}.$$

Частный пример построения подобного выражения мы рассмотрели в § 2 (см. прим. 6). Использованный там приём применяется и в общем случае. Многочлен P_{n+1} является суммой однородных выражений вида $Aa^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$:

$$P_{n+1} = \sum Aa^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda,$$

где $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n + 1$, A — рациональное число. Аналогично $P_n = \sum A_1 a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \ldots l^{\lambda_1}$, где $\alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \lambda_1 = n$, A_1 — рациональное число.

Пусть $\overline{d}$ — произвольный построенный отрезок, например $\overline{a}$ или $\overline{b}$. Разделим числитель P_{n+1} на d^n, а знаменатель P_n на d^{n-1}.

Тогда

$$x = d\,\frac{\dfrac{P_{n+1}}{d^n}}{\dfrac{P_n}{d^{n-1}}}.$$

$\dfrac{P_{n+1}}{d^n}$ представляет собой сумму выражений вида $A \cdot \dfrac{a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda}{d^n}$.

Каждое такое выражение можно построить (как указано в п. 1), после чего легко строится и сумма таких выражений. Обозначим полученный отрезок через $\overline{y}$, так что $y = \dfrac{P_{n+1}}{d^n}$. Аналогично построим отрезок $\overline{z}$, такой, что $z = \dfrac{P_n}{d^{n-1}}$. Искомый отрезок $\overline{x}$ построим по формуле $x = \dfrac{d \cdot y}{z}$.

Таким образом, с помощью циркуля и линейки можно построить отрезок, длина которого задана в виде любой рациональной однородной функции 1-го измерения (с рациональными коэффициентами) от длин данных отрезков.

3. Циркулем и линейкой всегда можно построить выражение вида $x = \sqrt{R_2(a, b, \ldots, l)}$, где подкоренное выра-

жение — однородная рациональная функция 2-го измерения с рациональными коэффициентами.

Пусть $\overline{d}$ — произвольный отрезок. Тогда

$$x=\sqrt{\frac{R_2(a, b, \ldots, l)}{d}\cdot d}.$$

Строим последовательно отрезки $\overline{y}$ и $\overline{x}$ по формулам: $y=\frac{R_2(a, b, \ldots, l)}{d}$ (что возможно, ибо правая часть — рациональная функция 1-го измерения относительно $a, b, c, \ldots, l$ и d) и $x=\sqrt{yd}$ (см. § 2, п. 8).

Пример. Пусть требуется построить выражение $x=\sqrt{ab+cd}$. Это выражение можно представить как $x=\sqrt{\left(\frac{ab}{d}+c\right)d}$. Строим $y=\frac{ab}{d}+c$ и затем $x=\sqrt{yd}$. Заметим, что данное выражение можно строить и так: сначала построить $u=\sqrt{ab}$ и $v=\sqrt{cd}$, а затем $x=\sqrt{u^2+v^2}$.

Общий приём построения отрезка, заданного однородной функцией 1-го измерения от длин данных отрезков, заключается в том, что мы выделяем последовательно однородные выражения 1-го измерения, которые можно построить как указано в § 2 пп. 1—10. Именно так мы и поступали при рассмотрении построений, указанных в пп. 1—3 этого параграфа.

Пример. $x=\sqrt[4]{a^4+b^4}$.

Представим заданное выражение в виде $x=\sqrt{\sqrt{a^4+b^4}}$. Под квадратным корнем находится многочлен 4-го измерения. Нужно оставить под знаком корня выражение 2-го измерения, чтобы корень оказался однородным выражением 1-го измерения: $x=\sqrt{a\sqrt{a^2+\frac{b^4}{a^2}}}$. Строим теперь отрезок $\overline{y}$ по формуле $y=\sqrt{a^2+\frac{b^4}{a^2}}$, т. е. $y=\sqrt{a^2+\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}$, а затем и отрезок $\overline{x}$ по формуле

$$x=\sqrt{ay}.$$

§ 6. Характеристическое свойство функции, определяющей длину одного и того же отрезка при любом выборе единицы измерения

Все рассмотренные в § 2, 3 и 5 выражения являются однородными функциями 1-го измерения от входящих в них длин отрезков. При построении этих выражений мы не интересовались вопросом, какой единицей длины измерены данные отрезки. Дело в том, что, как можно показать, в каждом из рассмотренных случаев при любом выборе единицы измерения мы получили бы один и тот же отрезок.

Однако не всякая функция $y = f(a, b, \ldots l)$ определяет длину одного и того же отрезка при любом выборе единицы измерения.

Разъясним это на примерах.

Пусть $\overline{a}$ — данный отрезок. Рассмотрим две функции:

$$Y = 2a \tag{1}$$

и

$$y = a^2. \tag{2}$$

Для определённости положим, например, что отрезок $\overline{a}$ содержит 4 *дм*. Первая из рассматриваемых функций — однородная 1-го измерения, а вторая — однородная 2-го измерения.

Рассмотрим сначала 1-ю функцию. Примем за единицу 1 *дм*. Тогда $a = 4$, $Y = 8$. Следовательно, $\overline{Y}$ — отрезок, содержащий 8 *дм*. Получим ли мы больший или меньший отрезок, если примем в качестве единичного отрезка не 1 *дм*, а другой отрезок? Пусть единичный отрезок равен 1 *см*. Тогда $a = 40$, $Y = 80$, т. е. $\overline{Y}$ — отрезок, содержащий 80 *см* или, что то же, 8 *дм*. Итак, мы во втором случае получили такой же отрезок $\overline{Y}$, как и в первом случае. Можно показать, что такой же отрезок Y мы получили бы и при всяком другом выборе единичного отрезка.

Перейдём теперь к рассмотрению 2-й функции: $y = a^2$ (которая не является однородной 1-го измерения). Если примем за единичный отрезок 1 *дм*, то $a = 4$ и $y = 16$, т. е. отрезок $\overline{y}$ должен содержать 16 *дм*. Если же принять за единичный отрезок 1 *см*, то $a = 40$, $y = 1600$, т. е. отрезок $\overline{y}$ должен содержать 1600 *см*, или 160 *дм*. Таким образом, отрезок, который мы получаем во втором случае, в 10 раз больше отрезка, полученного в первом случае, так что функция (2) определяет неравные между собой отрезки при различном выборе единичного отрезка.

Число $y = a^2$ можно рассматривать как ординату точки, имеющей абсциссу a и лежащей на параболе $y = x^2$. Аналогично можно истолковать Y $(Y = 2a)$ как ординату точки, лежащей на прямой $Y = 2x$.

Мы видели выше, что отрезок $\bar{y}$, где $y = a^2$, зависит от выбора единицы измерения, в то время как отрезок $\bar{Y}$, для которого $Y = 2a$, не зависит от этого. Это различие проявляется между прочим в том, что график функции

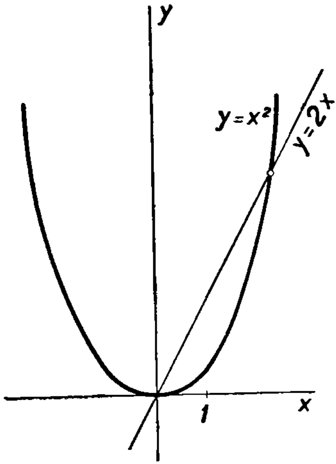

Рис. 186.

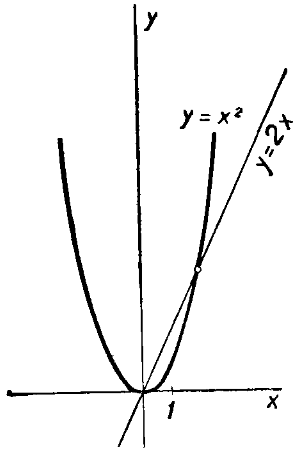

Рис. 187.

$Y = 2x$ (рис. 186, 187) не изменится, если изменить единицу масштаба, а график функции $y = x^2$ в результате этого изменится.

Возникает вопрос: какими свойствами должна обладать положительная функция $y = f(a, b, c, \ldots, l)$ $(a, b, c, \ldots, l$ — длины данных отрезков) для того, чтобы она при любом выборе единицы измерения определяла длину одного и того же отрезка? Оказывается, что это будет иметь место тогда и только тогда, когда $f(a, b, c, \ldots, l)$ — однородная функция 1-го измерения от своих аргументов. Доказательство этой теоремы можно найти в [21], ч. 1 § 47.

Именно в силу этого свойства при построении однородных выражений 1-го измерения нет нужды указывать, помимо данных отрезков, ещё и единичный отрезок: при любом выборе единичного отрезка в результате построения будет получен один и тот же отрезок. Совершенно иначе обстоит дело с построением неоднородных выражений, а также однородных выражений, но не 1-го измерения.

§ 7. Построение выражений, не являющихся однородными функциями 1-го измерения от длин данных отрезков

С построением выражений, не являющихся однородными 1-го измерения, мы можем столкнуться при построении кривых, заданных своими уравнениями, а также и в других случаях.

Построение произвольного выражения от n аргументов можно всегда свести к построению некоторого однородного выражения 1-го измерения от $n+1$ аргументов. В самом деле, пусть нужно построить отрезок $\overline{y}$ по формуле: $y=f(a, b, \ldots, l)$, где $f(a, b, \ldots, l)$ не является однородной функцией 1-го измерения от длин данных отрезков $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots, \overline{l}$. Пусть нам задан (или нами выбран) некоторый отрезок $\overline{e}$ в качестве единичного. Таким образом, $e=1$. Отсюда $f(a, b, \ldots, l)=e\cdot f\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}, \ldots, \frac{l}{e}\right)$. Поэтому задача сводится к построению отрезка по формуле:

$$y=e\cdot f\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}, \ldots, \frac{l}{e}\right).$$

Правая часть этого равенства — однородная функция 1-го измерения от длин $n+1$ отрезков $\overline{a}, \overline{b}, \ldots, \overline{l}$ и $\overline{e}$. Если мы сумеем построить отрезок $\overline{y}$ по этой формуле, то он и будет искомым (при выбранной единице масштаба). Заметим, что мы получим различные (т. е. неравные между собой) отрезки в зависимости от выбора отрезка $\overline{e}$.

Рассмотрим несколько примеров.

1. $y=a^2$, где $\overline{a}$ — данный отрезок.

Пусть $\overline{e}$ — отрезок, принимаемый за единичный; тогда $y=\frac{a^2}{e}$ $(e=1)$. Задача свелась к построению 7 из § 2.

2. $y=a^n$, где n — целое.

Задача сводится к построению выражения $y=\frac{a^n}{e^{n-1}}$.
Построение можно выполнить так, как указано на рисунке 188. На этом рисунке $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}=90°$, $OA_0=1$,

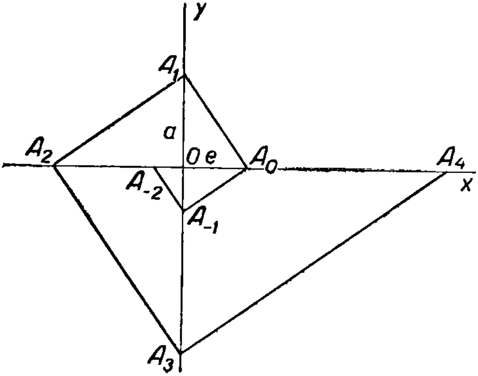

Рис. 188.

$OA_1=a$. Тогда, как легко проверить, $OA_n=a^n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3. $y=ab$.

Отрезок $\overline{y}$ строится по формуле: $y=\frac{ab}{e}$. Ход построения показан на рисунке 189. Здесь

$$OA=a, \quad OB=b, \quad OE=e, \quad AP=y.$$

4. $y=\frac{b}{a}$. Избирая $e=1$, получим; $y=\frac{be}{a}$. Построение показано на рисунке 189, где $EQ=y$.

5. $y=\sqrt{a}$.

Строится по формуле $y=\sqrt{ae}$, где $e=1$. Построение иллюстрирует рисунок 190.

6. $y=\frac{a^3+b\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}}$.

Ясно, что

$$y=\frac{a^3+be\sqrt{a^2-e^2}}{e\sqrt{a^2+e^2}} \quad (e=1).$$

y — однородная функция 1-го измерения от длин трёх известных отрезков $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{e}$. Поэтому её можно построить, пользуясь приёмами, указанными в § 5. Построение можно выполнить и непосредственно на основании построений 1—5 настоящего параграфа: строим последовательно отрезки $\overline{t}$,

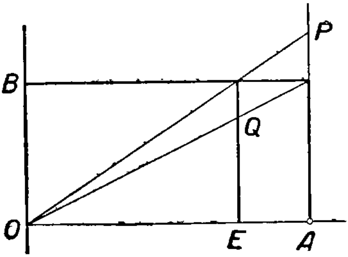

Рис. 189.

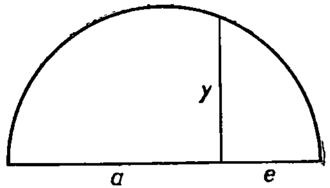

Рис. 190.

$\overline{z}, \overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{y}$ по формулам: $t = a^3$, $z = \sqrt{a^2-1}$, $u = b\sqrt{a^2-1}$, $v = \sqrt{a^2+1}$, $w = t + u$ и, наконец, $y = \frac{w}{v}$.

7. $y = \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Вводя единичный отрезок $\overline{e}$, получим:

$$y = \sqrt{2e^2 - e\sqrt{3e^2}}.$$

Строим теперь последовательно отрезки $\overline{x}$, $\overline{z}$, $\overline{u}$, $\overline{y}$ по формулам:

$$x = \sqrt{(3e)e}, \quad z = \sqrt{ex}, \quad u = \sqrt{(2e)e}, \quad y = \sqrt{u^2+z^2}.$$

З а м е ч а н и е. Рассмотренные здесь приёмы построения неоднородных выражений можно применить и к построению однородных выражений 1-го измерения.

§ 8. Признак возможности построения отрезка, являющегося заданной функцией данных отрезков, с помощью циркуля и линейки

Пользуясь циркулем и линейкой, мы строили ряд выражений, как однородных, так и неоднородных. Однако не всякое алгебраическое выражение можно построить этими инструментами. Из того, что длина некоторого (искомого) отрезка является известной функцией данных отрезков, ещё не следует, что его можно построить циркулем и линейкой. Так, например, этими инструментами не могут быть построены отрезки, заданные формулами $y=\sqrt[3]{a^3+b^3}$, $y=\sqrt[5]{a^2b^3}$, и многие другие.

Установим критерий, который позволил бы выяснить в каждом отдельном случае, можно ли отрезок, заданный формулой, построить циркулем и линейкой или нельзя. Для краткости операции сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения квадратного корня (арифметического из неотрицательного числа) назовём *основными* действиями.

В дальнейшем мы предполагаем, что дан (или выбран) единичный отрезок. В том случае, когда строится однородное выражение 1-го измерения, мы можем выполнить построение, не пользуясь этим отрезком. Во всех остальных случаях он существенно необходим для построения.

Теорема. *Для того чтобы циркулем и линейкой можно было построить отрезок, длина которого является заданной положительной функцией длин данных отрезков, необходимо и достаточно, чтобы длину искомого отрезка можно было выразить через длины данных отрезков при помощи конечного числа основных действий.*

Доказательство. 1. Достаточность. Пусть нужно построить некоторый отрезок, длина которого выражается через длины данных отрезков с помощью конечного числа основных действий. Покажем, что такой отрезок можно построить с помощью циркуля и линейки. Мы уже видели, что циркулем и линейкой можно построить отрезок, длина которого равна одному из следующих выражений: 1) сумме длин построенных отрезков, 2) разности длин построенных отрезков (где уменьшаемое больше вычитаемого), 3) произведению, 4) частному длин двух построенных отрезков и 5) квадратному корню из длины построенного отрезка. Помимо перечисленных выражений, положительная функция, составленная только с помощью основных операций, может содержать одну или несколько отрицательных разностей. Но каждый раз, когда встретится такая разность, от неё можно перейти к положительной разности, пользуясь тождественным соотношением $a-b=-(b-a)$. После конечного числа таких тождественных преобразований данная функция будет содержать уже только разности, в которых уменьшаемое больше вычитаемого. Отсюда вытекает, что действительно можно выполнить последовательно все построений, соответствующие основным операциям, в том порядке, в каком эти операции указаны в заданной формуле, так что после конечного числа шагов мы действительно построим отрезок, длина которого выражается через длины данных отрезков заданной формулой.

2. Необходимость. Пусть известно, что отрезок $\bar{u}$, длина которого u является заданной функцией от длин данных отрезков $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_p$ [т. е. $u = f(a_1, a_2, \ldots, a_p)$], может быть построен циркулем и линейкой. Докажем, что в таком случае длина отрезка $\bar{u}$ может быть выражена через длины данных отрезков с помощью конечного числа основных действий.

Как известно, всякое построение точек, выполнимое циркулем и линейкой, сводится к выполнению конечного числа следующих основных построений: 1) построение прямой, проходящей через две построенные точки; 2) построение окружности с центром в построенной точке и радиусом, равным расстоянию между двумя построенными точками; 3) построение общих точек: а) двух построенных прямых, б) построенной прямой и построенной окружности, в) двух построенных окружностей; 4) построение точки, заведомо не принадлежащей построенной фигуре или же заведомо ей принадлежащей (см. гл. I § 3).

Возможность построения отрезка $\bar{u}$ надо понимать как существование „цепочки" из конечного числа основных построений, которая приводит к искомому отрезку $\bar{u}$ при любом расположении данных отрезков. При этом результат построения (т. е. величина отрезка $\bar{u}$) не должен зависеть от положения данных отрезков $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_p$. Выбор произвольных точек (заведомо принадлежащих или заведомо не принадлежащих какой-либо попутно построенной фигуре) также не должен сказываться на величине $\bar{u}$ (хотя и может повлиять на его расположение).

Построим на плоскости прямоугольную систему координат (рис. 191). Всегда можно расположить отрезки на положительном луче оси абсцисс так, чтобы одним из концов каждого отрезка служило начало координат O. Таким образом на оси абсцисс образуются точки: $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Ясно, что построение отрезка $\bar{u}$ равносильно построению его концов A и B. Так как отрезок $\bar{u}$ можно построить, то должна существовать цепь из конечного числа основных построений, в результате выполнения которых на каком-то m-м шаге будет построен один из концов отрезка (например, точка A), а на некотором s-м шаге ($s > m$) — другой его конец, точка B. Длина отрезка $\bar{u}$ определяется через координаты (α, β) и (α', β') точек A и B по формуле:

$$u = \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2}.$$

Нам нужно теперь показать, что числа α, β, α' и β' выражаются через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ лишь с помощью конечного числа основных действий.

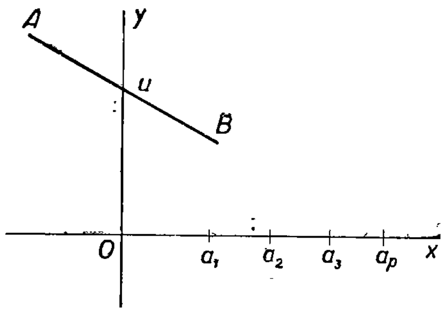

Рис. 191.

Условимся называть координаты центра окружности и её радиус параметрами окружности, коэффициенты уравнения прямой (записанного в виде $y = kx + b$ или $x = c$) — параметрами прямой, координаты точки — параметрами этой точки.

Выясним, в чём сущность дальнейших наших рассуждений. Точки могут появляться в ходе построения либо как произвольно выбираемые (см. п. 4), либо как общие точки двух ранее построенных линий (п. 3). В первом случае мы можем ограничить себя в выборе и выбирать только такие точки, координаты которых выражаются через $a_1, a_2, \ldots, a_p$ при помощи только основных операций. Во втором случае мы, как можно показать, всегда будем получать точки, координаты которых выражаются через параметры ранее построенных точек и линий лишь при помощи основных действий. Но параметры ранее построенных точек и линий, как мы увидим, выражаются, в свою очередь, через параметры ещё раньше построенных точек и линий также лишь при помощи основных действий. Эти рассуждения и приводят нас в конечном счёте к выводу, что параметры точек A и B выражаются через координаты точек $(a_1; 0)$, $(a_2; 0)$, ..., $(a_p; 0)$, т. е. через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ лишь при помощи основных действий, что и нужно доказать.

Ниже строго доказывается следующее предложение: s основных построений, в результате которых получаются концы отрезка $\overline{u}$, можно всегда выполнить так, чтобы в результате каждого из них строилась линия или точка, параметры которой выражаются через длины данных отрезков $a_1, a_2, \ldots, a_p$ лишь с помощью конечного числа основных действий. Для доказательства применяем метод полной индукции.

Рассмотрим сначала 1-й шаг. На 1-м шаге выполняется одно из следующих построений: 1) построение окружности с центром в данной точке $(a_k; O)$ и радиусом, равным расстоянию между какими-либо двумя данными точками; уравнение её будет $(x-a_k)^2+ y^2 = (a_i - a_j)^2$, где числа a_i. a_k, a_j означают длины данных отрезков или нуль; 2) построение прямой, проходящей через две данные точки, в результате чего получится ось абсцисс; 3) выбор произвольной точки, являющейся одной из данных точек или же заведомо не являющейся одной из них. В первых двух случаях, очевидно, параметры построенных линий выражаются через длины данных отрезков рационально. В третьем случае всегда можно выбрать в качестве произвольной точки такую точку, координаты которой рационально выражаются через длину одного из данных отрезков.

Таким образом, для 1-го шага построения справедливость доказываемого предложения установлена. Пусть теперь в результате первых $n-1$ шагов нами построены линии и точки, параметры которых выражаются с помощью лишь основных действий через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Покажем, что то же будет иметь место и после n-го шага. Рассмотрим каждый из возможных случаев.

1-й с л у ч а й. На n-м шаге строится прямая, проходящая через две известные точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. В силу индуктивного допущения можно считать, что их координаты выражаются через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ посредством конечного числа основных действий. Уравнение прямой, которую мы строим, имеет вид:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

т. е.

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1},$$

или

$$y=kx+b,$$

где k и b рационально выражаются через числа x_1, y_1, x_2 и y_2, а следовательно, параметры k и b выражаются через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ с помощью лишь конечного числа основных действий.

Наше рассуждение непригодно, если $x_1 = x_2$. Но в этом случае уравнение прямой имеет вид $x = x_1$, и следовательно, параметр её также выражается через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ посредством конечного числа основных действий.

2-й случай. На n-м шаге строится окружность с центром в построенной точке $(c; d)$ и радиусом, равным расстоянию между двумя построенными точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Уравнение окружности имеет вид $(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$, где

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

В силу индуктивного допущения заключаем, что параметры построенной окружности выражаются через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ посредством конечного числа основных действий.

3-й случай. На n-м шаге строится точка пересечения двух построенных прямых. Пусть уравнения этих прямых:

$$y = kx + b \tag{1}$$

и

$$y = k_1 x + b_1. \tag{2}$$

Координаты точки пересечения (а таковая существует, если $k \neq k_1$) могут быть найдены путём решения системы двух уравнений (1) и (2). Мы найдём при этом:

$$x = \frac{b_1 - b}{k - k_1}, \quad y = \frac{kb_1 - k_1 b}{k - k_1}.$$

Но параметры прямых (1) и (2) выражаются, в силу индуктивного допущения, через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ с помощью лишь конечного числа основных действий. Значит и координаты точки пересечения данных прямых определяются через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ с помощью конечного числа основных действий. Ещё проще установить справедливость предложения для случая, когда уравнение одной из прямых имеет вид $x = x_1$.

4-й случай. На n-м шаге строятся общие точки прямой и окружности. Пусть уравнение окружности

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2. \tag{1}$$

Пусть уравнение прямой

$$y = kx + b. \tag{2}$$

Параметры прямой и окружности выражаются, в силу допущения, через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ посредством конечного числа основных действий. Координаты общих точек прямой и окружности найдём, решая совместно два уравнения (1) и (2). Исключая из этих уравнений y, получим квадратное уравнение относительно x. Решив его, найдём x, а затем и y, которые выражаются через числа x_1, y_1, r, k и b посредством конечного числа основных действий. Вычисления показывают, что

$$x = \frac{ky_1 + x_1 - kb \pm \sqrt{(ky_1 + x_1 - kb)^2 - (1 + k^2)(b^2 - 2by_1 + y_1^2 + x_1^2 - r^2)}}{1 + k^2}.$$

y находим затем по формуле (2). Под радикалом не может возникнуть отрицательное число, так как это означало бы, что числа x мнимые, т. е. что окружность не пересекается с прямой, а это противоречит условию. Рассуждая, как и ранее, найдём, что координаты общих точек прямой и окружности выражаются через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ лишь посредством конечного числа основных действий. Результат остаётся в силе и для случая, когда рассматриваемая прямая параллельна оси ординат.

5-й случай. На n-м шаге строятся общие точки двух окружностей. Координаты общих точек должны удовлетворять двум уравнениям:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2 \tag{1}$$

$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2, \tag{2}$$

причём параметры этих окружностей выражаются, в силу допущения, через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ посредством конечного числа основных действий. Система уравнений (1) и (2) легко приводится к системе, состоящей из одного линейного уравнения и одного уравнения 2-й степени:

$$\begin{cases} 2(x_1-x_2)x+2(y_1-y_2)y+x_1^2+y_1^2-r_1^2-x_2^2-y_2^2+r_2^2=0\ldots & (1') \\ (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2\ldots & (1) \end{cases}$$

Уравнение (1′) получается путём почленного вычитания уравнений (1) и (2). Решая систему уравнений (1′) и (1), выразим x и y через числа x_1, y_1, x_2, y_2, r_1, r_2, следовательно, через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ лишь с помощью конечного числа основных действий.

6-й случай. На n-м шаге строится произвольная точка, заведомо не принадлежащая некоторой ранее построенной фигуре Ф. Покажем, что эта точка может быть построена так, чтобы её параметры (координаты) выражались через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ рационально.

Так как по условию даны только несколько отрезков и мы пользуемся только циркулем и линейкой, то фигура Ф может быть только соединением конечного числа точек, прямых, отрезков, лучей, окружностей и их дуг. Пусть в процессе построений, которые производились на первых $n-1$ шагах, построено всего k прямых, отрезков и лучей. Выберем на оси абсцисс $k+1$ точек с абсциссами a_1, $2a_1$, $3a_1, \ldots, ka_1$, $(k+1)a_1$ и проведём через них прямые, параллельные оси ординат. Ясно, что хотя бы одна из них не является одной из ранее построенных прямых и не содержит ни одного из ранее построенных отрезков или лучей.

Изберём эту прямую. Эта прямая имеет с фигурой Ф конечное число общих точек; пусть их будет q. Построим на избранной прямой $q+1$ точек с ординатами $a_1, 2a_1, \ldots, (q+1)a_1$. Очевидно, что по крайней мере одна из них отлична от точек фигуры Ф. (Общие аксиомы конструктивной геометрии (гл. 1, § 1) обеспечивают возможность построения такой точки.) Координаты этой точки рационально выражаются через a_1.

7-й случай. На n-м шаге строится точка, принадлежащая одной из построенных линий. Надо доказать, что эта точка может быть выбрана так, чтобы её координаты выражались через данные числа $\{a_i\}$ исключительно с помощью основных операций в конечном числе, причём она должна быть отлична от ранее построенных точек указанной линии.

Пусть для определённости ранее построенная линия — окружность, уравнение которой имеет вид:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2 \ldots \qquad (1)$$

Пусть на этой окружности надо построить точку, отличную от каких-то k имеющихся на ней точек $P_1, P_2, \ldots, P_k$. На окружности (1) всегда можно выбрать $k+1$ точек с абсциссами, рационально выражающимися через числа x_1 и r. Для этого можно, например, разделить отрезок $(x_1 - r, x_1 + r)$ оси абсцисс на k равных частей, и тогда концы этого отрезка и точки деления получат абсциссы, рационально выражающиеся через x_1 и r. В каждой из этих точек восставим перпендикуляр к оси абсцисс и отметим какую-либо точку пересечения его с окружностью (1). Хотя бы одна из таких $k+1$ точек отлична от всех точек $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Обозначим её через M. Ясно, что её абсцисса x рационально выражается через числа x_1 и r, а следовательно, выражается посредством конечного числа основных действий через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Ординату же y этой точки мы найдём из уравнения (1), так что она выразится с помощью конечного числа основных действий через числа x_1, y_1, x и r, а значит, и через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Итак, мы показали, что n-й шаг можно выполнить так, чтобы на этом шаге получить точки и линии, параметры которых выражаются через числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ лишь с помощью конечного числа основных действий. В частности, в результате m-го и s-го шагов мы получим точки A и B, координаты которых выражаются через числа $\{a_i\}$ лишь посредством конечного числа основных действий.

Теорема доказана.

Следствие. Если дан только отрезок, принимаемый за единичный, и l — данное число, то отрезок длиной l может быть построен циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда число l может быть получено из 1 посредством лишь конечного числа основных действий.

§ 9. Решение задач на построение методом алгебраического анализа

Сущность метода алгебраического анализа заключается в следующем. Решение задачи на построение сводят к построению некоторого отрезка (или нескольких отрезков). Величину искомого отрезка выражают через величины известных отрезков с помощью формулы. Затем строят искомый отрезок по полученной формуле.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. (Задача об удвоении квадрата.)

Построить квадрат, площадь которого вдвое больше площади данного квадрата.

Обозначим сторону данного квадрата через a, а сторону искомого квадрата через x. Тогда $x^2 = 2a^2$, $x = a\sqrt{2}$.

Строим теперь отрезок $\overline{x}$ по полученной формуле: x — гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом a. Построив отрезок $\overline{x}$, легко затем построить искомый квадрат (рис. 192).

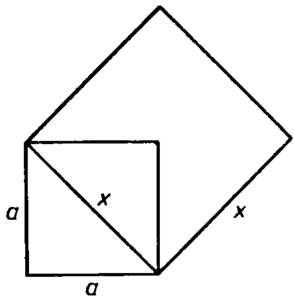

Рис. 192.

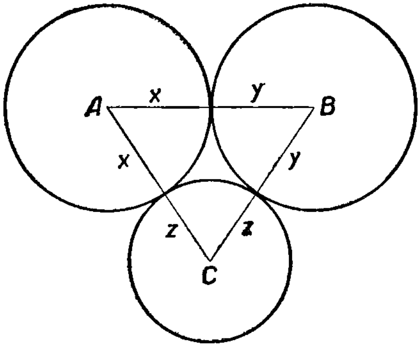

Рис. 193.

Пример 2. Из вершин данного треугольника, как из центров, описать три окружности, касающиеся попарно внешним образом.

Пусть ABC (рис. 193) — данный треугольник, a, b, c — его стороны, x, y и z — радиусы искомых окружностей. Выразим длины отрезков $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ через длины известных отрезков $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Тогда $x + y = c$, $x + z = b$, $y + z = a$. Поэтому

$$2x + 2y + 2z = a + b + c, \quad x + y + z = \frac{1}{2}(a + b + c),$$

откуда

$$x = \frac{c + b - a}{2}, \quad y = \frac{a + c - b}{2}, \quad z = \frac{a + b - c}{2}.$$

Строим теперь один из найденных отрезков, например $\overline{x}$, по формуле $x = \frac{c + b - a}{2}$ и проводим окружность (A, x).

Две другие окружности проводим из центров B и C радиусами соответственно $c-x$ и $b-x$.

Для доказательства достаточно заметить теперь, что две последние окружности касаются между собой, так как сумма их радиусов

$$(c-x)+(b-x)=c+b-2x=c+b-(c+b-a)=a=BC,$$

т. е. равна расстоянию между их центрами.

Задача всегда однозначно разрешима, так как 1) в треугольнике ABC $b+c>a$ и поэтому отрезок x может быть построен; 2) $c>x$, потому что $c-x=c-\frac{c+b-a}{2}=$ $=\frac{(a+c)-b}{2}>0$, так как $a+c>b$; 3) $b>x$, потому что $b-x=\frac{(a+b)-c}{2}>0$.

Пример 3. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c и биссектрисе l прямого угла.

Анализ. Задача легко решится после того, как удастся определить высоту h искомого треугольника, проведённую из вершины прямого угла. Из рисунка 194 видно, что $S_{ABC}=S_{ADC}+S_{BDC}$, т. е. $\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}b\frac{l}{\sqrt{2}}+$ $+\frac{1}{2}a\frac{l}{\sqrt{2}}$ или

$$ch\sqrt{2}=(a+b)l \ldots \qquad (1)$$

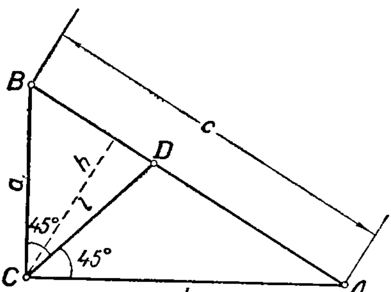

Рис. 194.

Остаётся исключить из этого соотношения два неизвестных катета a и b. Для этого нужно составить ещё два независимых уравнения, которым удовлетворяют эти катеты:

$$a^2+b^2=c^2; \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch. \qquad (3)$$

Отсюда: $a^2+b^2+2ab=c^2+2ch$ или

$$(a+b)^2=c^2+2ch. \qquad (4)$$

Из формулы (1) имеем:

$$2c^2h^2=(a+b)^2l^2 \text{ или } 2c^2h^2=(c^2+2ch)l^2.$$

Таким образом, искомая высота определяется из уравнения $2ch^2 - 2l^2h - cl^2 = 0$, из которого находим единственное положительное решение:

$$h = \frac{l(l + \sqrt{l^2 + 2c^2})}{2c}. \tag{5}$$

Построение. Строим отрезок h по формуле (5). На произвольной прямой откладываем отрезок $AB = c$. На AB, как на диаметре, строим окружность. Проводим пару прямых, параллельных AB, на расстоянии h от этой прямой (рис. 195). Отмечаем точку C пересечения этих прямых с окружностью. Треугольник ABC искомый.

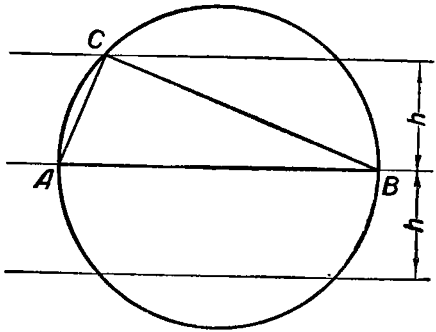

Рис. 195.

Доказательство вытекает из обратимости всех приведённых в анализе рассуждений.

Исследование. Перебирая последовательно шаги построения, замечаем, что последний шаг выполни́м тогда и только тогда, когда $h \leqslant \frac{c}{2}$, т. е. когда

$$\frac{l(l + \sqrt{l^2 + 2c^2})}{2c} \leqslant \frac{c}{2}. \tag{6}$$

После упрощения это условие принимает вид: $l \leqslant \frac{c}{2}$. Если $l < \frac{c}{2}$, то пара прямых и окружность пересекаются в четырёх точках, так что мы получим четыре треугольника, удовлетворяющих условию задачи. Однако они все равны. Поэтому задача имеет единственное решение. Если же $l = \frac{c}{2}$, то пара прямых касается окружности, и мы получаем два равнобедренных прямоугольных треугольника, удовлетворяющих условию задачи. Эти треугольники также равны между собой, задача имеет единственное решение. Итак, приведённый способ всегда позволяет найти единственное решение задачи, если выполнено условие: $l \leqslant \frac{c}{2}$.

Читатель сам докажет, что два прямоугольных треугольника, имеющие равные гипотенузы и равные биссектрисы прямых углов, равны между собой. Поэтому других решений задача не имеет.

§ 10. Построение тригонометрических выражений

С помощью циркуля и линейки можно построить ряд выражений, зависящих от тригонометрических функций известных углов.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Дан отрезок $\overline{c}$ и острый угол α. Построить отрезки $\overline{x}$ и $\overline{y}$ по формулам $x = c\cos\alpha$, $y = c\sin\alpha$.

Строим прямоугольный треугольник по гипотенузе $\overline{c}$ и углу α (рис. 196). Прилежащий к углу катет равен $\overline{x}$, а противолежащий — $\overline{y}$.

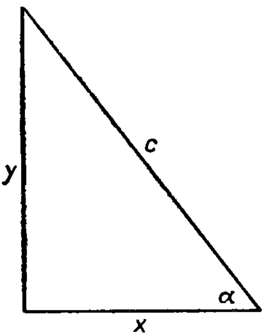

Рис. 196.

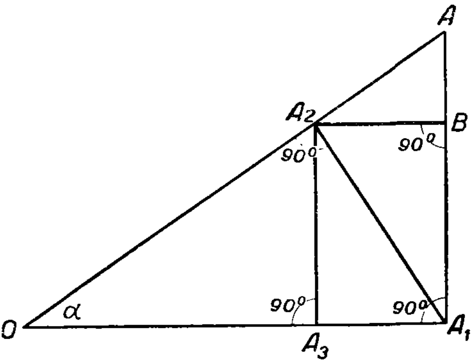

Рис. 197.

Пример 2. Построить отрезки $\overline{x}$ и $\overline{y}$ по формулам

$$x = a\cos^3\alpha, \quad y = a\sin^3\alpha,$$

где $\overline{a}$ — данный отрезок, α — данный угол.

Построение видно из рисунка 197. Здесь $OA = a$, $OA_8 = a\cos^3\alpha$, $BA = a\sin^3\alpha$.

Аналогично можно построить и отрезки по формулам

$$x = a\cos^n t, \quad y = a\sin^n t.$$

З а м е ч а н и е. Формулы $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ определяют (при $0 \leqslant t < 2\pi$) кривую линию, называемую а с т р о и д о й. Пользуясь указанным в примере 2 построением, можно без всяких вычислений, выполняя лишь построения циркулем и линейкой, найти любое число точек, лежащих на этой линии.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Как ставится задача построения отрезка, заданного формулой?

2. Укажите несколько способов построения среднего геометрического к двум данным отрезкам.

3. Укажите способы построения четвёртого пропорционального к трём данным отрезкам.

4. Перечислите основные шаги построения корней квадратного уравнения $x^2 + px - q^2 = 0$.

5. То же для уравнения вида $x^2 + px + q^2 = 0$.

6. Как решить на основании формул Виета уравнение вида $x^2 - px - q^2 = 0$ с помощью циркуля и линейки?

7. Какая функция называется однородной?

8. Приведите примеры однородных функций 1-го измерения, нулевого измерения, 4-го измерения.

9. Как построить циркулем и линейкой выражение вида $x = \sqrt{R_2(a, b, \ldots, l)}$, где R_2 — рациональная однородная функция 2-го измерения от длин данных отрезков?

10. Каким свойством обладает функция, определяющая длину одного и того же отрезка при любом выборе единицы измерения?

11. Как строятся неоднородные выражения от длин данных отрезков?

12. Сформулируйте признак возможности построения циркулем и линейкой отрезка, заданного формулой. Разъясните, что значит необходимость и достаточность этого признака.

13. Каков план доказательства необходимости признака, упомянутого в вопросе 12?

14. В чём сущность метода алгебраического анализа при решении геометрических задач на построение?

ЗАДАЧИ

1. Будут ли однородными, а если будут, то какого измерения, следующие функции:

1) $ab^3 - \frac{c^5}{a}$; 2) $\frac{a-b}{a+b}$; 3) $a^2b - cd$; 4) $\frac{a}{a^2+b^2}$.

2. Дан единичный отрезок. Построить отрезок, длина которого была бы равна $2 - \sqrt{2}$; $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

3. Построить отрезки по формулам:

$$x=\frac{a^3+b^3}{a^2};\quad x=\frac{a^3+b^3}{ab+ac};\quad x=\sqrt[4]{a^3b-b^3a}.$$

4. Как построить следующие выражения:

$$x=\frac{a^7+b^7}{(ab+cd)(b^4+c^4)};\quad x=\sqrt{a^2-\frac{b^5}{a^3}};\ x=\sqrt[4]{abcd};$$

$$x=\sqrt[4]{\frac{a^5-b^5+c^5}{a+b+c}};\quad x=\frac{\sqrt{a^5-b^5}}{\sqrt{a^3+b^3}-\sqrt{a^3-b^3}}?$$

5. Как построить отрезок, длина которого равна $\sqrt[8]{3{,}4^8+2{,}3^8}$, не производя фактически указанных действий над данными числами?

6. Построить несколько точек, принадлежащих графикам следующих функций, не производя никаких вычислений:

1) $y=x^2$

2) $y=x^3$

3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4) $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ (a, b, x — длины данных отрезков).

7. Не производя вычислений, построить несколько точек, лежащих на эллипсе $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

8. Построить угол α, зная, что:

$$1)\ \sin\alpha=\frac{a}{b};\ 2)\ \cos\alpha=\frac{a-b}{a+b};\ 3)\ \operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{a^3-b^3}{c^3}}.$$

9. Построить квадрат, площадь которого была бы равна сумме площадей двух данных прямоугольников.

10. В данный круг вписать прямоугольник, равновеликий данному квадрату.

11. В данную окружность вписать прямоугольник данного периметра.

12. Через данную внешнюю точку провести секущую к данной окружности так, чтобы её внешняя часть была втрое больше внутренней.

13. Через заданную вне окружности точку провести такую прямую, чтобы окружность отсекала на ней отрезок данной длины.

14. От данного квадрата отсечь одинаковые прямоугольные треугольники так, чтобы образовался правильный восьмиугольник.

15. Построить окружность, ограничивающую круг с площадью, равной площади кольца между двумя данными концентрическими окружностями.

16. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

17. Данный отрезок разделить в среднем и крайнем отношении (см. [9], ч. I, п. 209).

18. В данную окружность вписать правильный десятиугольник.

19. В данную окружность вписать треугольник, если даны точки пересечения его биссектрис с окружностью.

20. Провести прямую, которая одновременно делила бы пополам площадь и периметр данного треугольника.

21. Построить треугольник по трём высотам.

22. Разделить трапецию на две равновеликие части, проводя прямую, параллельную основанию.

Глава VII

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, НЕ РАЗРЕШИМЫЕ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ

§ 1. Предварительные замечания

Нетрудно указать примеры задач на построение, не имеющих решений. Нельзя вписать окружность в данный прямоугольник (не являющийся квадратом), нельзя провести касательную из данной точки к данной окружности, если точка эта расположена внутри данной окружности, и т. п.

Неразрешимы обычно так называемые „переопределённые“ задачи, т. е. задачи, содержащие излишние условия: построить треугольник по двум сторонам и двум углам, провести окружность через четыре данные точки и т. п.

Значительно интереснее задачи, решение которых заведомо *существует, но не может быть найдено* при помощи тех или иных избранных инструментов геометрических построений. В этих случаях ставится задача о доказательстве невозможности выполнения данного построения данными средствами. Такого рода „доказательства невозможности“ встречаются и в других разделах математики и часто принадлежат к числу наиболее трудных вопросов. Доказательство неразрешимости даже простых по формулировке задач на построение этого рода часто оказывается связанным с наиболее трудными вопросами алгебры и анализа и уводит далеко за пределы элементарной геометрии. Вопрос о разрешимости некоторых задач на построение (с помощью циркуля и линейки), возникших ещё в глубокой древности, был разрешён только во второй половине XIX в.

Лишь в редких случаях *доказательство неразрешимости* той или иной задачи на построение можно провести средствами элементарной геометрии. В качестве примера покажем, что *нельзя провести перпендикуляр к данной прямой через данную точку, пользуясь только линейкой.*

Доказательство поведём способом „от противного". Пусть в плоскости α задана точка P и прямая a. Допустим, что оказалось возможным провести через точку P прямую p, перпендикулярную к прямой a, пользуясь только линейкой. Это означает, что найдена конечная последовательность основных построений, которая всегда (т. е. независимо от выбора данной прямой a и данной точки P) приводит к построению искомого перпендикуляра.

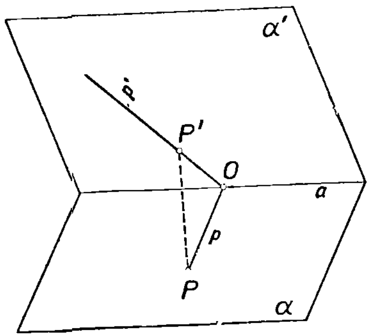

Рис. 198.

Пусть (рис. 198) O — основание проведённого перпендикуляра. Проведём через данную прямую a какую-либо плоскость α', отличную от α, и в этой плоскости — наклонную p' к прямой a через точку O. Пусть P' — произвольная точка на прямой p', отличная от O. Представим себе, что сеть точек и прямых, построенная нами на плоскости α, проектируется на плоскость α' лучами, параллельными прямой $P'P$. При этом точки будут проектироваться в точки (в частности P в P'), прямые—в прямые (прямая a—в себя), причём будут сохраняться все отношения принадлежности, существующие между точками и прямыми, так что весь проведённый нами процесс построения в плоскости α в точности повторится в плоскости α'. И если в плоскости α найденная последовательность основных построений привела к построению перпендикуляра p к прямой a, то и в плоскости α' окажется, что прямая p' перпендикулярна a. Но это заведомо не так.

Та же идея проектирования позволяет доказать, что *исключительно линейкой нельзя разделить отрезок пополам, или провести параллель к данной прямой, или построить центр начерченной окружности* *.

---

* Доказательство последнего утверждения можно найти в [10], § 26 или в [21].

В настоящей главе мы познакомимся с некоторыми классическими задачами на построение, решения которых не могут быть найдены с помощью циркуля и линейки. Особенно важно заметить, что эти же задачи решаются с привлечением других инструментов построения, а также допускают приближённое решение с помощью циркуля и линейки. Во многих случаях решения с другими инструментами не представляют никакого затруднения, а приближённые построения дают решения, практически вполне удовлетворительные. Поэтому исследования неразрешимости конструктивных задач представляют главным образом исторический и методологический интерес. Кроме того, они вскрывают связь теории геометрических построений с некоторыми важными вопросами других областей математики.

§ 2. Спрямление окружности и квадратура круга

Задача о квадратуре круга пользовалась исключительной известностью с древнейших времён и тысячелетиями привлекала к себе внимание математиков. Она привлекает к себе внимание прежде всего простотой формулировки: *построить квадрат, площадь которого была бы равна площади данного круга.*

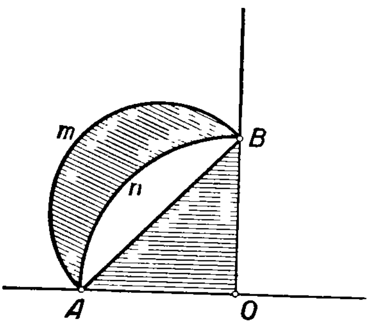

Рис. 199.

Долгое время не возникало сомнения в возможности осуществить квадратуру круга. Эта уверенность подкреплялась, по-видимому, тем, что ещё в V в. до н. э. греческому геометру Гиппократу удалось превратить в квадрат некоторые „круговые луночки" (часть плоскости, ограниченная дугами двух окружностей). На рисунке 199 изображена „луночка" $AmBn$, равновеликая треугольнику ABO (который нетрудно превратить в равновеликий ему квадрат).

Популярность задачи о квадратуре круга „росла вместе с числом неудачных попыток её разрешения" *.

---

* Ф. Рудио, О квадратуре круга, М. — Л., 1934.

В XV в. были высказаны предположения о невозможности решить эту задачу циркулем и линейкой (Леонардо да Винчи и другие).

В XVII и XVIII вв. делались попытки доказать неразрешимость задачи о квадратуре круга. Исследования этого вопроса вызвали к жизни некоторые проблемы из области алгебры и теории чисел.

Площадь круга радиуса r равна $\pi r^2 = \left(\sqrt{2\pi r \cdot \frac{r}{2}}\right)^2$, т. е. равна площади квадрата со стороной $\sqrt{2\pi r \cdot \frac{r}{2}}$, которая строится как средний пропорциональный отрезок между отрезками $2\pi r$ и $\frac{r}{2}$.

И если бы можно было, зная радиус круга r, построить отрезок длиной $2\pi r$, то легко можно было бы построить такой квадрат.

И обратно: если бы при данном r можно было построить квадрат, равновеликий кругу, то можно было бы построить отрезок, равный по длине окружности. В самом деле: если a — сторона упомянутого квадрата, то $\pi r^2 = a^2$, так что $2\pi r = \frac{2a^2}{r}$ и искомый отрезок строится как четвёртый пропорциональный отрезок к отрезкам $2a$, a и r.

Итак, *задача о квадратуре круга равносильна задаче о „спрямлении окружности“*, т. е. о построении отрезка длиной $2\pi r$. При $r = 1$ длина окружности равна 2π. Поэтому задача о спрямлении окружности привела к изучению свойств числа π.

В 1766 г. известным швейцарским математиком Иоганном Ламбертом (1728—1777) было дано первое доказательство *иррациональности* числа π, впоследствии усовершенствованное Лежандром (1752—1833) *. Доказательства иррациональности числа π дали также Эйлер, Гаусс, Эрмит и другие. Но этим лишь наметился путь для дальнейших исследований: иррациональность числа π ещё не решала вопроса о возможности квадратуры круга ни в положительном, ни в отрицательном смысле.

Чтобы уяснить себе алгебраическую сторону проблемы, вспомним признак возможности построения отрезка циркулем и линейкой (глава VI, § 8): если длина отрезка,

---

* Эти доказательства приведены, например, в книге Рудио „О квадратуре круга“.

который может быть построен с помощью циркуля и линейки, является функцией длин данных отрезков, то она может быть выражена через длины данных отрезков с помощью конечного числа рациональных операций и операций извлечения квадратного корня. Исходя только из r и полагая $r=1$, мы заметим, что длина искомого отрезка должна образоваться из 1 с помощью только рациональных операций и операций извлечения квадратного корня. Известно, что такие числа являются *алгебраическими*, т. е. служат корнями многочленов с рациональными коэффициентами (см., например, А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, 1955, § 55*). Числа, не являющиеся алгебраическими, называют *трансцендентными*. Таким образом, для разрешимости задачи о квадратуре круга необходимо, чтобы число π было алгебраическим, а не трансцендентным.

Первые примеры трансцендентных чисел были получены только во второй половине XIX в. Впоследствии оказалось, что множество трансцендентных чисел является „более мощным", „более богатым" элементами, чем множество алгебраических чисел. В 1882 г. было доказано, что число π является трансцендентным числом (Ф. Линдеманн, 1852—1939) *. Вместе с этим, наконец, была разрешена проблема квадратуры круга: *квадратура круга невозможна с помощью циркуля и линейки.*

Несмотря на то, что задача о спрямлении окружности (и задача о квадратуре круга) с помощью циркуля и линейки теоретически точно не разрешима, можно указать различные простые приёмы *приближённого* решения этой задачи с достаточной для практических целей точностью.

Если разделить окружность точками на достаточно большое число достаточно малых дуг, то периметр многоугольника, для которого эти точки служат последовательно вершинами, может быть принят за длину окружности. Этот приём широко используется в чертёжной практике. Недостаток его состоит в том, что точность решения сравнительно трудно поддаётся учёту.

Известно, что ещё в III в. до н. э. Архимед нашёл, что $\pi \approx \frac{22}{7}$. При таком допущении отрезок длиной $2\pi r$ строится как три целых и одна седьмая диаметра данной

* Доказательство трансцендентности числа π изложено в доступной форме в брошюре Г. И. Дринфельда „Трансцендентность чисел π и e" (Харьков, 1952).

окружности. Это построение даёт приближённое решение задачи с избытком, причём относительная погрешность не превышает 0,13%.

Интересный приём приближённого спрямления окружности с помощью только циркуля предложил итальянский геометр Маскерони (1750—1800). Пусть O — центр данной окружности, A—какая-либо точка окружности (рис. 200).

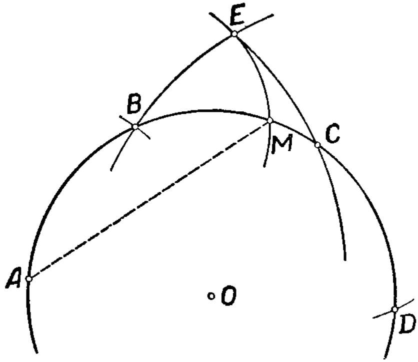

Рис. 200.

Строим четыре последовательные вершины правильного вписанного шестиугольника: A, B, C и D. Пусть E — точка пересечения окружности (A, AC) и окружности (D, DB). Пусть в пересечении дуги BC данной окружности с окружностью (B, BE) образуется точка M. Тогда длина отрезка AM равна одной четвёртой части длины окружности с точностью до 0,04%.

Обоснование этого способа можно найти, например, в [1], § 20, п. 161. Оказывается, что при $r=1$ $AM=\frac{1}{2}\times$ $\times\left(\sqrt{9-3\sqrt{6}}+\sqrt{1+\sqrt{6}}\right)=1{,}5712\ldots$, в то время как $\frac{\pi}{2}=1{,}57079\ldots$

Оригинальный приём приближённого спрямления окружности был предложен в 1685 г. польским математиком Кохански м (1631—1700). Сущность этого приёма ясна из прилагаемого рисунка 201. На этом рисунке $AB=BC=$ $=AD=DB=DE=FG=GH=HI=1$.

$$CI=\sqrt{\frac{40}{3}-\sqrt{12}}\approx 3{,}141533,$$

т. е. отрезок $\breve{C}I$ даёт приближённую величину длины полуокружности радиуса 1. Способ Коханского интересен тем, что построение осуществляется линейкой и циркулем постоянного размаха.

Простой способ приближённого спрямления окружности посредством циркуля и линейки предложен недавно Г. Мюл-

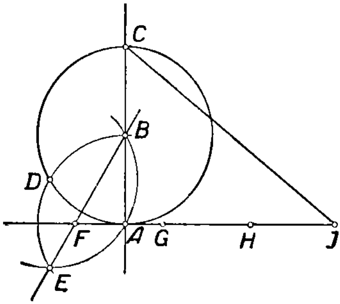

Рис. 201.

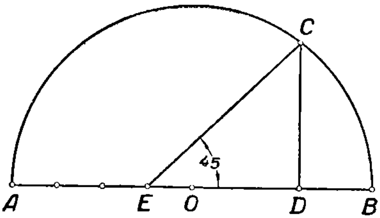

Рис. 202.

лером. Ход построения по этому способу легко проследить по рисунку 202, где $OE = 1$, $OA = OB = 4$, $\angle BEC = 45°$, $CD \perp AB$, $AD = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{31}) = 6{,}2840 \ldots \approx 2\pi$.

§ 3. О построении корней кубического уравнения

Мы предполагаем рассмотреть ещё некоторые классические задачи на построение, алгебраическое решение которых ведёт к составлению кубических уравнений. Рассмотрим поэтому вопрос о построении корней кубического уравнения.

Чтобы получить основной для данного вопроса результат, необходимо остановиться на некоторых понятиях алгебры.

Как известно, *числовым полем* называют любое множество чисел, в котором результат каждого арифметического действия над любыми двумя числами этого множества (деление на нуль исключается) всегда принадлежит также данному множеству чисел. Одним из простейших примеров числового поля является множество рациональных чисел: сложение, вычитание, умножение и деление рациональных чисел всегда даёт рациональное число. Напротив, все целые числа не образуют поля, так как при делении двух целых чисел не всегда получается целое число. Для наших целей важно отметить ещё следующий пример.

Числа вида $r_1 + r_2\sqrt{3}$, где r_1 и r_2 принимают всевозможные рациональные значения, образуют поле. И вообще, если p — какой-либо наперёд избранный фиксированный элемент данного числового поля P, то числа вида $p_1 + p_2\sqrt{p}$, где p_1 и p_2 — любые элементы поля P, образуют в свою очередь некоторое числовое поле. В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Например, деление числа $p_1' + p_2' \sqrt{p}$ на число $p_1'' + p_2'' \sqrt{p}$ приводит к

$$\frac{(p_1' + p_2' \sqrt{p})(p_1'' - p_2'' \sqrt{p})}{p_1''^2 - pp_2''^2} = \frac{p_1' p_1'' - p_2' p_2'' p}{p_1''^2 - pp_2''^2} + \\ + \frac{p_1'' p_2' - p_1' p_2''}{p_1''^2 - pp_2''^2} \sqrt{p} = p_1''' + p_2''' \sqrt{p},$$

где p_1''' и p_2''' принадлежат P, как результаты арифметических действий над элементами этого поля. Ещё проще проверить, что сумма, разность и произведение двух чисел вида $p_1 + p_2 \sqrt{p}$ также дают число такого вида. После этого из определения следует, что числа вида $p_1 + p_2 \sqrt{p}$ действительно образуют поле.

Если P — данное поле, ε — число, не принадлежащее полю P, то минимальное поле, содержащее P и ε, называется *расширением* поля P путём присоединения элемента ε и обозначается символом $P[\varepsilon]$. Поясним это понятие следующим примером. Пусть P — какое-либо числовое поле, $\varepsilon = \sqrt{p}$, p — элемент поля P, ε не принадлежит полю P. Поле $P[\varepsilon]$ должно содержать все числа p', принадлежащие полю P, и числа вида $p'' \sqrt{p}$, где p'' — число, принадлежащее полю P; следовательно, оно должно содержать в себе поле P^*, состоящее из всех чисел вида $p' + p'' \sqrt{p}$. Но это поле P^* содержит в себе поле P (чтобы в этом убедиться, достаточно избрать $p'' = 0$) и $\sqrt{p}$ (положить $p' = 0$, $p'' = 1$). Следовательно, расширение $P[\sqrt{p}]$ совпадает с полем P^*, т. е. расширение поля P путём присоединения элемента $\sqrt{p}$ представляет множество всех чисел вида $p' + p'' \sqrt{p}$, где p' и p'' — всевозможные элементы поля P.

После этих предварительных замечаний перейдём к доказательству следующей теоремы, которая служит основой для исследования некоторых классических конструктивных задач.

Теорема. *Если какой-либо корень приведённого кубического уравнения с рациональными коэффициентами может быть построен посредством циркуля и линейки, то это уравнение обладает по крайней мере одним рациональным корнем.*

Рассмотрим уравнение

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0, \tag{1}$$

где под a, b и c мы будем понимать какие-либо рациональные числа. Заметим, что подстановка $y = x - \frac{a}{3}$ переводит данное уравнение в уравнение

$$x^3 + r_1 x + r_2 = 0, \tag{2}$$

где r_1, r_2 — также рациональные числа, причём уравнения (1) и (2) одновременно имеют или не имеют рациональные корни и корни этих уравнений одновременно могут или не могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Это позволяет ограничиться исследованием только более простого уравнения (2).

Пусть корень x_1 уравнения (2) может быть построен с помощью циркуля и линейки. Это означает (см. гл. VI, § 8), что число x_1 образуется из единицы посредством рациональных операций и операций извлечения квадратного корня, производимых в конечном числе. Число x_1 может само оказаться рациональным, и тогда теорема доказана. Если же x_1 выражается через 1 не только с помощью рациональных операций, но и с помощью операций извлечения квадратного корня, то можно построить поле, содержащее x_1, путём последовательного присоединения к полю рациональных чисел соответствующих квадратных радикалов, т. е. путём построения последовательных расширений поля рациональных чисел посредством присоединения квадратных радикалов. Если например, $x_1 = \frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-7\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, то пусть R — поле рациональных чисел, $R_1 = R[\sqrt{3}]$, $R_2 = R_1[\sqrt{2}]$, $R_3 = R_2[\sqrt{2-\sqrt{2}}]$, $R_4 = R_3[\sqrt{5}]$, и тогда поле R_4 уже содержит число x_1. Если R_{k+1} — первое из последовательно образуемых полей расширения, содержащее число x_1, то, согласно сказанному в начале этого параграфа, число x_1 имеет вид $r'_k + r''_k\sqrt{r_k}$, где r'_k, r''_k, r_k — числа, принадлежащие предыдущему расширению R_k.

Подстановка найденного выражения x_1 в данное уравнение приводит к соотношению $p'_k + p''_k\sqrt{r_k} = 0$, где

$$p'_k = r'^3_k + 3r'_k \cdot r''^2_k r_k + r_1 r'_k + r_2 \text{ и } p''_k = 3r'^2_k \cdot r''_k + r''^3_k r_k + r_1 r''_k,$$

так чтобы оба числа p'_k и p''_k принадлежали полю R_k.

Если положить $p''_k \neq 0$, то получим: $\sqrt{r_k} = -\frac{p'_k}{p''_k}$. Значит, $\sqrt{r_k}$, а следовательно, и x_1 будут принадлежать полю R_k, что противоречит сделанному предположению, что R_{k+1} — первое из полей расширения, содержащих x_1. Следовательно, $p''_k = 0$, откуда в силу $p'_k + p''_k\sqrt{r_k} = 0$ вытекает, что и $p'_k = 0$.

Непосредственная подстановка показывает, что при этом число $x_2 = r'_k - r''_k\sqrt{r_k}$ также служит корнем данного уравнения. А так как по известному свойству корней алгебраического уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, то третий корень данного уравнения $x_3 = -(x_1 + x_2) = -2r'_k$ и, значит, корень x_3 принадлежит полю R_k.

Таким образом, допуская, что один из корней данного уравнения, именно x_1, принадлежит полю R_{k+1}, мы пришли к выводу, что другой корень x_3 этого уравнения принадлежит полю R_k. Исходя из этого вывода, путём таких же рассуждений можно доказать, что некоторый корень данного уравнения принадлежит полю R_{k-1}. Повторяя такое рассуждение, мы придём к заключению, что некоторый из корней данного уравнения принадлежит полю R, т. е. является рациональным числом, что и требовалось доказать.

§ 4. Задача удвоения куба

Задача удвоения куба состоит в следующем: *зная ребро данного куба, построить ребро такого куба, объём которого был бы вдвое больше объёма данного куба.*

Обозначая ребро искомого куба через x, приходим к уравнению $x^3 = 2a^3$. Принимая длину ребра данного куба за 1, получим: $x^3 - 2 = 0$. Из алгебры известно, что рациональные корни приведённого уравнения с целыми коэффициентами могут быть только целыми и содержатся среди делителей свободного члена уравнения. Но делителями числа 2 служат только числа $+1$, -1, $+2$ и -2, и ни одно из них, как легко проверить, не удовлетворяет данному уравнению. Следовательно, уравнение $x^3 - 2 = 0$ рациональных корней не имеет, а это означает (см. теорему § 3), что задача удвоения куба не может быть решена с помощью циркуля и линейки.

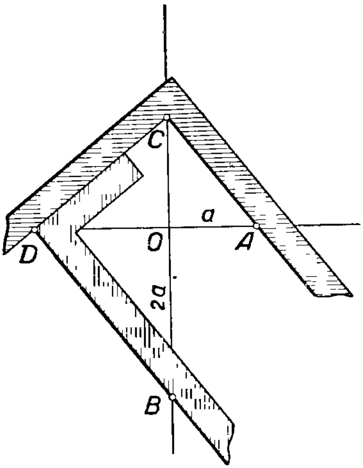

Рис. 203.

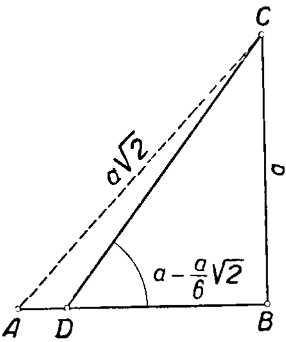

Рис. 204.

Заметим, однако, что задача удвоения куба может быть математически строго решена с привлечением других инструментов. Так, например, ещё около 400 г. до н. э. Платон нашёл решение этой задачи с привлечением двух прямых углов.

Пусть $OA = a$ — данное ребро куба. Проведём через точку O прямую, перпендикулярную OA, и отложим на ней отрезок $OB = 2a$ (рис. 203).

Расположим два прямых угла так, чтобы: 1) вершина C первого угла оказалась на продолжении луча OB, а вершина D второго — на продолжении луча OA, 2) одна из сторон первого угла проходила через точку A и одна сторона второго — через B и 3) чтобы две другие стороны углов расположились на одной прямой CD.

По известной теореме о перпендикуляре, проведённом из вершины прямого угла к гипотенузе треугольника, $OA : OC = OC : OD$ и $OC : OD = OD : OB$, так что $a : OC = OC : OD$ и $a : OC = OD : 2a$ или $a \cdot OD = OC^2$ и $2a^2 = OC \cdot OD$, откуда $2a^3 = OC^3$ и, следовательно, отрезок OC искомый.

Задача об удвоении куба может быть решена с помощью циркуля и линейки лишь приближённо. Приведём один из самых простых способов приближённого решения этой задачи.

Пусть $AB = BC = a$, причём $AB \perp BC$ (рис. 204). Строим $AD = \frac{1}{6} AC$. Тогда $CD \approx a\sqrt[3]{2}$ с точностью до 1%. В самом деле,

$$CD = \sqrt{a^2 + BD^2} = a\sqrt{1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2} =$$

$$= \frac{a}{6}\sqrt{74 - 12\sqrt{2}} = a \cdot 1{,}2586\ldots$$

В то же время $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599\ldots.$

§ 5. Задача о трисекции угла

Задача о трисекции угла состоит в том, чтобы *разделить данный угол на три равные части.*

Ограничимся решением задачи для углов, не превышающих $90°$. Если α — тупой угол, то $\alpha = 180° - \beta$, где $\beta < 90°$, так что $\frac{\alpha}{3} = 60° - \frac{\beta}{3}$, и поэтому задача о трисекции тупого угла α сводится к задаче о трисекции острого угла β.

Заметим, что (при наличии единичного отрезка) задача о построении угла φ ($\varphi \leqslant 90°$) равносильна задаче о построении отрезка $x = \cos\varphi$. В самом деле, если угол φ построен, то построение отрезка $x = \cos\varphi$ сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу (см. рис. 205). Обратно, если построен отрезок x, то построение такого угла φ, что $x = \cos\varphi$, сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.

Пусть α — данный угол, φ — искомый угол, так что $\varphi = \frac{\alpha}{3}$. Тогда $\cos\alpha = \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$. Поэтому, полагая $\cos\varphi = \frac{x}{2}$, $\cos\alpha = \frac{b}{2}$, приходим к уравнению: $x^3 - 3x - b = 0$. Отрезок $\overline{x}$, а следовательно, и угол φ могут быть построены лишь в том случае (см. § 3), когда это уравнение имеет хотя бы один рациональный корень. Но это имеет место не при всяком α, и поэтому задача о делении угла на три равные части, вообще говоря, не разрешима с помощью циркуля и линейки. Например, при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ получим $b = 1$ и найденное уравнение принимает вид: $x^3 - 3x - 1 = 0$. Легко проверить, что это уравнение не обладает никаким рациональным корнем, откуда следует невозможность деления угла в 60° на три равные части с помощью циркуля и линейки.

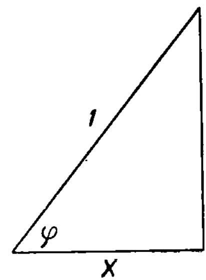

Рис. 205.

Таким образом, *задача о трисекции угла не разрешима циркулем и линейкой в общем виде*. Необходимо отметить, что она может быть решена этими инструментами в некоторых частных случаях. Широко известно, например, деление на три равные части прямого угла. Предыдущие рассуждения приводят в этом случае к уравнению $x^3 - 3x = 0$, которое имеет корни 0, $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$. Практически построение сводится в этом случае к делению на три равные части заключённой между сторонами прямого угла дуги окружности с центром в вершине прямого угла. Это достигается путём откладывания на дуге $\frac{1}{6}$ части окружности от каждого конца дуги. После этого легко заметить, что трисекция возможна при $\alpha = \frac{\pi}{2^n}$ (n — натуральное). Задача о трисекции оказывается разрешимой и при некоторых других частных значениях угла α.

Достаточно небольшого усиления конструктивных возможностей циркуля и линейки, чтобы трисекция любого угла стала уже выполнимой. Деление произвольного угла на три равные части может быть произведено при помощи циркуля и линейки с двумя отметками. При этом к основным построениям, осуществляемым с помощью циркуля и линейки, присоединяется ещё одно основное построение: через данную точку провести прямую так, чтобы её отрезок между двумя построенными линиями был равен расстоянию между отметками на линейке (если такая прямая вообще существует). Практически эта операция осуществляется путём перемещения одной из отметок, например A (рис. 206), по одной из данных линий (на рисунке по l_1) до тех пор, пока вторая отметка B попадёт на вторую линию (l_2), причём линейка всё время остаётся проходящей через данную точку P.

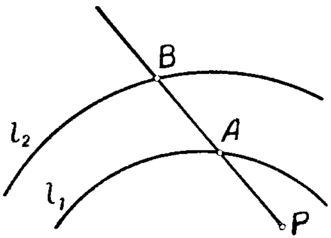

Рис. 206.

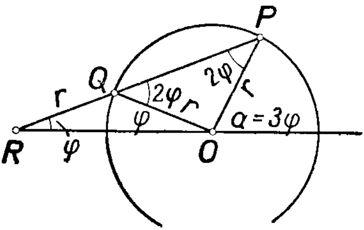

Рис. 207.

Трисекция угла с помощью циркуля и линейки с двумя отметками производится следующим образом. Пусть α — данный угол (рис. 207). Опишем из вершины угла окружность радиуса r, где r — расстояние между отметками на линейке. Пусть P — точка пересения проведённой окружности с одной из сторон угла α. Проведём через точку P прямую так, чтобы отрезок её между второй точкой (Q) её пересечения с окружностью и точкой R пересечения с продолжением второй стороны угла α был равен r. Обозначая угол ORQ через φ и исходя из свойства углов равнобедренного треугольника и из свойства внешнего угла треугольника, мы без труда заметим, что $\alpha = 3\varphi$. Таким образом, угол φ представляет $\frac{1}{3}$ данного угла α. Этот способ построения приписывается Архимеду.

Существуют приборы, позволяющие выполнять трисекцию угла. Такие приборы называются трисекторами. Один из них изображён на рисунке 208. Он представляет соединение двух шарнирных ромбов $ABCD$ и $AB'C'D'$. Вершина C может скользить по стержню AD', а вершина C' — по стержню AB. Чтобы данный угол MON разделить на три равные части, помещают точку A в вершину угла O и направляют сторону ромба AD по стороне угла OM, а сторону ромба AB' — по стороне угла ON. После этого диагонали ромбов AC и AC' разделят угол MON на три равные части.

Значительно проще для изготовления трисектор, изображённый на рисунке 209. Он состоит из полуокружности ω,

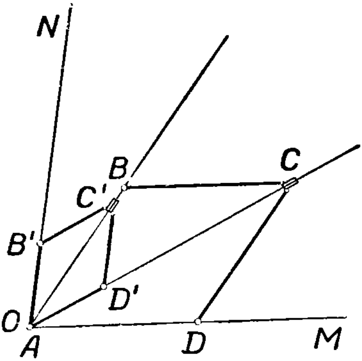

Рис. 208.

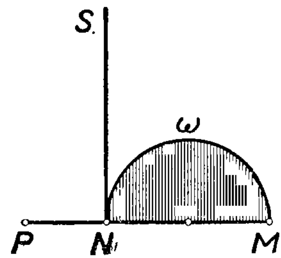

Рис. 209.

стержня s, касательного к ней в конце диаметра MN, и стержня NP, продолжающего диаметр за касательную на отрезок, равный радиусу окружности.

Из рисунка 210 видно, что для деления угла AOB на три равные части достаточно поместить прибор так, чтобы касательная s прошла через вершину угла O, окружность ω коснулась одной из сторон OA, а конец P стержня NP попал на другую сторону OB. При этом касательная s отделит $\frac{1}{3}$ данного угла, считая от стороны OB.

В чертёжной практике трисекция малых углов осуществляется приближённо так: проводят окружность из вершины данного угла, как из центра, делят на три равные части хорду, стягивающую дугу этой окружности, заключённую между сторонами угла, и проводят радиусы через точки деления (см. рис. 211). Этот приём основан на том, что для малых центральных углов соответствующая дуга мало отличается от стягивающей её хорды. Этот способ очень прост, но не всегда даёт удовлетворительный результат.

В разное время было предложено много различных способов приближённой трисекции угла.

Хорошее приближение можно получить, например, по способу, предложенному ещё в начале XVI в. знаменитым немецким художником Альбрехтом Дюрером (1471—1528).

На рисунке 212 показано приближённое деление дуги AB на три равные части по способу Дюрера. Здесь $AC = CD = DB = \frac{1}{3} AB$; $CE \perp AB$; $AF = AE$; $FG = \frac{1}{3} FC$;

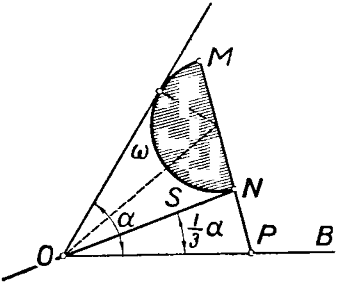

Рис. 210.

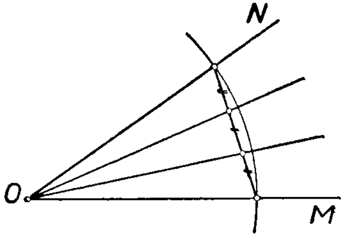

Рис. 211.

$AM = AG$. Тогда $\smile AM \approx \frac{1}{3} \smile AB$. Для острых углов ошибка не превосходит 18″.

Интересный способ приближённой трисекции угла предложен Л. А. Шрубко в его работе „Трисекция угла"

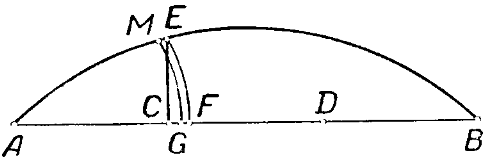

Рис. 212.

(„Известия Академии наук Казахской ССР", № 115. Серия геологии, вып. 12, 1952, стр. 99—103). Предложенный им способ даёт возможность последовательно улучшать полученные приближения и произвести трисекцию угла с любой степенью точности.

§ 6. Построение правильных многоугольников

В школьном курсе геометрии рассматривается построение правильных треугольников, квадратов, правильных шестиугольников и восьмиугольников. Иногда рассматривают также построение правильных пятиугольников (и вместе с этим десятиугольников). Метод построения меняется при этом в зависимости от числа сторон. Естественно возникает вопрос об изыскании общего метода построения правильных многоугольников и об исследовании возможности построить правильный n-угольник при том или ином значении n.

Решение этого вопроса было связано с большими теоретическими трудностями. Однако проблема была полностью решена великим немецким математиком К. Ф. Гауссом (1777—1855) в 1796 г. Мы остановимся на этом вопросе лишь в главных чертах.

Понятно, что вопрос о возможности построения правильного n-угольника равносилен вопросу о возможности деления окружности на n равных частей: если окружность разделена на n равных частей, то последовательное соединение точек деления приводит к построению правильного n-угольника; обратно: если построен правильный n-угольник, то легко определяется его центр, а следовательно, и центральный угол, соответствующий $\frac{1}{n}$-й части дуги окружности.

Значительное упрощение вопроса о возможности построения правильного n-угольника даёт следующая теорема.

Теорема. *Если число n разлагается на два взаимно простых множителя p и q, то возможность деления окружности на n равных частей равносильна ввзможности деления окружности в отдельности на p и q равных частей.*

Ход рассуждения „в одну сторону" совершенно ясен: если окружность разделена на n равных частей, то, группируя эти части по p частей, получим точки деления окружности на q частей, а группируя те же части по q, разделим окружность на p равных частей.

Допустим теперь, что обратно: окружность может быть разделена как на p, так и на q равных частей. Составим уравнение $qx - py = 1$. Такое уравнение, как известно, всегда разрешимо в целых числах (так как коэффициенты его взаимно простые). Пусть x и y — целые решения этого уравнения. Тогда $\frac{x}{p} - \frac{y}{q} = \frac{1}{n}$, так что $x\frac{2\pi}{p} - y\frac{2\pi}{q} = \frac{2\pi}{n}$, и для получения $\frac{1}{n}$-й части окружности достаточно из повторенной x раз $\frac{1}{p}$-й её части вычесть повторенную y раз $\frac{1}{q}$-ю её часть. Например, чтобы разделить окружность на 15 равных частей, достаточно из удвоенной третьей части окружности вычесть утроенную 5-ю её часть.

Из доказанной теоремы следует, что принципиальный интерес представляет только изучение тех случаев, когда n есть простое число или степень простого числа.

Перейдём к алгебраическому представлению задачи деления окружности.

Как известно, каждому числу $z = x + yi$ сопоставляется на декартовой координатной плоскости точка z с координатами $(x;\ y)$. Комплексное число z называют *аффиксом* точки z. Для краткости вместо „построить точку (на данной декартовой координатной плоскости), аффиксом которой служит число $z = x + yi$" (т. е. точку с координатами $(x;\ y)$), часто говорят: „построить точку z" или „построить число z".

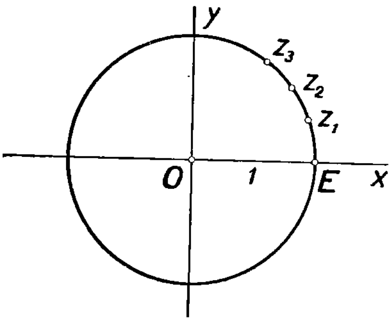

Рис. 213.

Пусть дана окружность $\omega(O,\ r)$, которую требуется разделить на n равных частей (n—простое). Без потери общности можно положить, что $r = 1$. Проведём через O две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, которые примем за оси координат (рис. 213). Пусть положительный луч оси абсцисс пересекает окружность ω в точке E, так что эта точка имеет координаты $(1;\ 0)$.

Задача деления окружности на n равных частей состоит далее в том, чтобы построить точки $z_k = \cos\frac{2\pi}{n}k + i\sin\frac{2\pi}{n}k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$, т. е. чтобы построить отличные от единицы корни уравнения $z^n - 1 = 0$.

Корни последнего уравнения, отличные от единицы, являются корнями уравнения $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0$, которое называют *уравнением деления окружности.*

Заметим, что (при простом n) для построения всех вершин правильного вписанного n-угольника достаточно построить какую-либо одну его вершину, отличную от E. Действительно, из алгебры известно (см. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, ОГИЗ, 1946, гл. I, § 5), что путём последовательного возведения в степень любого первообразного корня из единицы можно получить все корни уравнения $z^n - 1 = 0$. Геометрически это означает, что если (помимо E)

построена какая-либо одна вершина E_k, то, откладывая последовательно по окружности дугу EE_k, мы после $n-2$ шагов получим все остальные вершины.

Для дальнейшего полезно ещё следующее замечание. Пусть $z=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}=x+yi$. Тогда $z+\frac{1}{z}=2\cos\frac{2\pi}{n}$. Отсюда следует, что если можно построить циркулем и линейкой отрезок $v=z+\frac{1}{z}$, то можно построить и точку z, и наоборот. В самом деле, легко заметить, что $x=\frac{v}{2}$.

Согласно сделанному выше разъяснению, общий метод решения задачи о делении окружности на n равных частей с помощью циркуля и линейки сводится к исследованию вопроса: можно ли построить какой-либо корень уравнения $z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z+1=0$, и если можно, то как? Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть $n=5$. Уравнение деления окружности имеет в этом случае вид:

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0. \tag{1}$$

Выясним, может ли быть построен циркулем и линейкой какой-либо корень уравнения (1), например:

$$z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}. \tag{2}$$

Тем самым будет решён вопрос о возможности деления окружности на 5 равных частей циркулем и линейкой. Положим

$$z+\frac{1}{z}=v, \tag{3}$$

где под z понимаем число (2). Тогда

$$v=2\cos\frac{2\pi}{5}>0. \tag{4}$$

Так как число z удовлетворяет уравнению (1), то оно должно удовлетворять и уравнению

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0. \tag{5}$$

Так как $z+\frac{1}{z}=v$, то $z^2+\frac{1}{z^2}=v^2-2$, так что уравнение (5) можно представить в виде:

$$v^2+v-1=0. \tag{6}$$

Это уравнение имеет один положительный и один отрицательный корень. В силу (4) v — положительный корень уравнения (6), т. е. $v=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Отрезок такой длины может быть построен циркулем и линейкой. Следовательно, можно построить и точку $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$. Таким образом, установлено, что циркулем и линейкой можно разделить окружность на 5 равных частей.

Пусть теперь $n=7$. Этот случай приводит к уравнению $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$, которое равносильно уравнению $z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}=0$. Положим $z+\frac{1}{z}=v$. Возведя это равенство почленно в квадрат и в куб, получим: $z^2+\frac{1}{z^2}=v^2-2$, $z^3+\frac{1}{z^3}=v^3-3v$, и мы приходим к уравнению $v^3+v^2-2v-1=0$. Нетрудно проверить, что это уравнение не имеет рациональных корней, так что отрезок v не может быть построен циркулем и линейкой (см. § 3). Таким образом, устанавливается, что построение правильного 7-угольника с помощью циркуля и линейки не осуществимо.

В случае $n=17$ задача опять сводится к построению отрезка

$$v=z+\frac{1}{z}=z+z^{16}=2\cos\frac{2\pi}{17}.$$

К построению этой величины можно подойти постепенно, отправляясь от соотношения;

$$z+z^2+z^3+\ldots+z^{16}=-1. \qquad (*)$$

Обозначим:

$$(z+z^{16})+(z^2+z^{15})+(z^4+z^{13})+(z^8+z^9)=\gamma_1,$$
$$(z^3+z^{14})+(z^5+z^{12})+(z^6+z^{11})+(z^7+z^{10})=\gamma_2.$$

Из соотношения (*) ясно, что $\gamma_1+\gamma_2=-1$. С другой стороны, исходя из того, что $z^{17}=1$, нетрудно установить, что $\gamma_1\cdot\gamma_2=-4$. Следовательно, γ_1 и γ_2 суть корни квадратного уравнения $\gamma^2+\gamma-4=0$, так что $\gamma_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. Корни эти легко могут быть построены (по абсолютной величине). Чтобы отличить один корень от другого, заметим, что

$$\gamma_2 = 2\left(\cos\frac{6}{17}\pi - \cos\frac{7}{17}\pi - \cos\frac{5}{17}\pi - \cos\frac{3}{17}\pi\right).$$

Это число заведомо отрицательно, так что

$$\gamma_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}.$$

Располагая величинами γ_1 и γ_2, можно построить величины

$$\beta_1 = z + z^4 + z^{13} + z^{16}, \quad \beta_2 = z^2 + z^8 + z^9 + z^{15},$$
$$\beta_3 = z^3 + z^5 + z^{12} + z^{14} \quad \text{и} \quad \beta_4 = z^6 + z^7 + z^{10} + z^{11}.$$

Действительно, $\beta_1 + \beta_2 = \gamma_1$, $\beta_1 \cdot \beta_2 = -1$, так что β_1 и β_2 суть корни уравнения

$$\beta^2 - \gamma_1 \cdot \beta - 1 = 0$$

и, следовательно,

$$\beta_{1,2} = \frac{\gamma_1 \pm \sqrt{\gamma_1^2 + 4}}{2}.$$

Так как

$$\beta_1 = 2\left(\cos\frac{2}{17}\pi + \cos\frac{8}{17}\pi\right) > 0,$$

то

$$\beta_1 = \frac{\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + 4}}{2}, \quad \beta_2 = \frac{\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 + 4}}{2}.$$

Точно так же можно показать, что

$$\beta_3 = \frac{\gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 + 4}}{2}, \quad \beta_4 = \frac{\gamma_2 - \sqrt{\gamma_2^2 + 4}}{2}.$$

Переходя к последнему шагу, обозначим

$$z + z^{16} = \alpha_1, \quad z^4 + z^{13} = \alpha_2.$$

Тогда:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1, \quad \alpha_1 . \alpha_2 = \beta_3,$$

так что величины α_1 и α_2 служат корнями уравнения

$$\alpha^2 - \beta_1 \alpha + \beta_3 = 0,$$

т. е.

$$\alpha_{1,2} = \frac{\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_3}}{2}.$$

И так как

$$\alpha_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17}, \quad \alpha_2 = 2\cos\frac{8\pi}{17},$$

то $\alpha_1 > \alpha_2$ и, следовательно,

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_3}}{2}.$$

Считая, что β_1 и β_3 уже построены, заметим, что циркуль и линейка позволяют теперь построить отрезок $\alpha_1 = v$.

Построение 17-угольника было выполнено различными способами ещё в прошлом веке. Описание этого построения можно найти в [1] и в [30].

Проводя аналогичные рассуждения в общем виде, К. Ф. Гаусс в 1796 г. доказал следующую теорему.

Построение правильного n-угольника с помощью циркуля и линейки возможно в том и только в том случае, когда число n может быть представлено в виде $2^m p_1 p_2 \ldots p_S$, где $p_1, p_2, \ldots, p_S$ — различные простые числа вида $2^{2^k}+1$.

В частности, если n — простое число, то для того чтобы правильный n-угольник можно было построить посредством циркуля и линейки, необходимо и достаточно, чтобы число n имело вид $2^{2^k}+1$.

Мы не имеем возможности проследить здесь рассуждения, которые приводят к этому замечательному критерию. Доказательство теоремы Гаусса можно найти в [30].

Воспользуемся критерием Гаусса для выяснения возможности построения правильного n-угольника ещё в некоторых конкретных случаях.

Формула $n = 2^{2^k}+1$ при $k=3$ даёт $n = 257$. Такой многоугольник может быть построен циркулем и линейкой, ибо 257 — простое число. Этому построению посвящена работа, появившаяся в 30-х годах прошлого века (Ришело).

При $k=4$ $n=65\,537$. Это также простое число, и, следовательно, многоугольник с таким числом сторон может быть построен циркулем и линейкой. Такое построение действительно было выполнено немецким профессором Гермесом.

При $k=5$ $n=2^{32}+1=4\,294\,967\,297$. Как заметил ещё Эйлер (по другому поводу), это число составное: оно делится на 641 *. Простое число 641 не имеет вида $2^{2^k}+1$, и поэтому правильный n-угольник с таким числом сторон не может быть построен циркулем и линейкой.

Как показал (в 1877—1878 гг.) уральский математик-любитель Первушин, при $k=12$ или 23 число $2^{2^k}+1$ также является составным.

Было также обнаружено, что число вида $2^{2^k}+1$ является составным при $k=6, 7, 8, 9, 11, 18, 36$. До сих пор остаётся открытым вопрос: имеется ли среди чисел вида $2^{2^k}+1$ конечное число простых чисел или таких чисел бесконечно много? Поэтому до сих пор неизвестно, сколько можно вписать в окружность данного радиуса неравных между собой правильных многоугольников с простым числом сторон — конечное число или бесконечно много.

Из теоремы Гаусса видно, в частности, что нельзя построить циркулем и линейкой правильный 7-угольник, так как простое число 7 нельзя представить в форме $2^{2^k}+1$. Для практических целей можно считать, что сторона правильного вписанного 7-угольника приблизительно равна половине стороны правильного вписанного в ту же окружность треугольника: при $r=1$ $a_7=2\sin\frac{360^\circ}{14}\approx 0{,}868$, в то время как $\frac{a_3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}867$, так что погрешность такого приближения не превышает $0{,}3\%$.

Невозможно построение циркулем и линейкой также правильного 9-угольника, ибо $9=3^2$ и, следовательно, не выполняется одно из условий теоремы Гаусса (все p_i должны быть различны). После этого ясно, что нельзя также циркулем и линейкой построить угол в 1°, т. е. разделить окружность на 360 равных частей.

Метод Гаусса слишком сложен, конечно, для использования в школьном преподавании. Чтобы вооружить учащихся общим методом построения правильных n-угольников, можно рекомендовать только какие-либо приближённые приёмы, которые обычно и употребляются в практике для

* $2^{32}+1=2^{28}\cdot 2^4+1=2^{28}\cdot(641-625)+1=2^{28}\cdot 641-2^{28}\cdot 5^4+1=2^{28}\cdot 641-[(2^7\cdot 5)^4-1]$;

Но $[(2^7\cdot 5)^4-1]$ делится на $(2^7\cdot 5+1)$, т. е. на 641. Следовательно, и $(2^{32}+1)$ делится на 641.

решения этой задачи. Приведём здесь один из таких приёмов.

Пусть ω — данная окружность и AB — её диаметр (рис. 214). Построим правильный треугольник ABC и разделим диаметр AB точкой D в отношении $AD:AB = 2:n$.

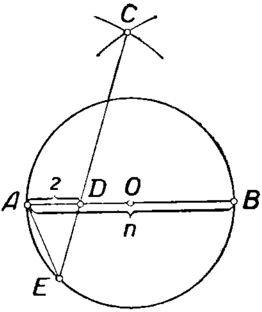

Рис. 214.

Пусть продолжение отрезка CD пересекает окружность ω в точке E; тогда можно показать, что хорда AE представляет сторону правильного вписанного n-угольника с точностью, допустимой во многих практических работах. При $n = 3$, 4, 6 указанный способ даёт точное решение задачи. При $n = 5$, 7, 9, 10 погрешность построения не превышает 1%. С возрастанием числа n погрешность приближения растёт, но остаётся меньше 10,3%. Относящиеся сюда вычисления читатель может найти в заметке Б. А. Кордемского, помещённой в журнале „Математика в школе" (№ 1 за 1953 г.).

В тех случаях, когда задача построения правильного n-угольника не может быть решена циркулем и линейкой, она может оказаться разрешимой иными средствами.

Так, например, правильный семиугольник может быть построен при наличии двух прямых углов.

Доказано (см. [33]), что при наличии линейки с двумя пометками может быть тогда и только тогда построен правильный n-угольник, если n имеет вид

$$2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_s,$$

причём $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа вида $2^k \cdot 3^m + 1$ (α, β, k, m — целые числа).

В частности, линейкой с двумя пометками может быть построен правильный n-угольник при $n = 7$, 13, 19 и др., но нельзя построить, например, правильный 11-угольник.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Укажите несколько задач на построение, не имеющих решений.
2. Перечислите известные вам задачи на построение, не разрешимые с помощью циркуля и линейки.

3. Докажите, что корни уравнения $x^3-5x+1=0$ не могут быть построены циркулем и линейкой.

4. Докажите, что корни уравнения $2x^3-7x^2+3x+5=0$ можно построить, пользуясь только циркулем и линейкой.

5. Напишите какое-либо уравнение 3-й степени с рациональными коэффициентами, корни которого не могут быть построены с помощью циркуля и линейки.

6. Напишите какое-либо уравнение 3-й степени с рациональными коэффициентами, корни которого могут быть построены с помощью циркуля и линейки.

7. Какие числа называются алгебраическими? Как называются остальные действительные числа?

8. Объясните, как из трансцендентности числа π вытекает, что задача спрямления окружности не разрешима циркулем и линейкой.

9. Докажите, что задача о квадратуре круга равносильна задаче о спрямлении окружности.

10. Какие вам известны способы приближённого спрямления окружности?

11. Как читается теорема Гаусса о делении окружности?

12. Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить окружность на 11, 12, 25, 100 равных частей?

Глава VIII

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Геометрическая задача на построение всегда решается с привлечением только некоторых наперёд указанных средств. Этим самым круг производимых построений всегда ограничен: разрешено только как угодно комбинировать те основные построения, которыми характеризуются принятые инструменты, и пользоваться общими аксиомами конструктивной геометрии.

До сих пор мы рассматривали почти исключительно геометрические построения в условиях неограниченного применения циркуля и линейки. Эти условия могут быть более ограничены за счёт сокращения числа применяемых инструментов, за счёт ограничения размеров чертежа и инструментов. Рассмотрим здесь некоторые вопросы этого рода.

§ 1. Построения одним циркулем

Многие геометрические задачи на построение естественным образом решаются с привлечением только циркуля, причём в привлечении линейки иногда не только нет необходимости, но это даже не может упростить решение таких задач. Таковы, например, задачи: „Разделить данную окружность на 6 равных частей“ (решение которой общеизвестно); „Построить точку, симметричную данной точке, относительно данной прямой“ (решение которой одним циркулем приведено в гл. III § 3). Рассмотрим ещё некоторые примеры решения задач исключительно циркулем.

Задача 1. Повторить данный отрезок n раз, пользуясь только циркулем.

Пусть A и A_1 — две данные точки. Требуется найти на прямой AA_1 такие точки $A_2, A_3, \ldots, A_n$, чтобы $AA_2 = 2AA_1$, $AA_3 = 3AA_1, \ldots, AA_n = nAA_1$.

Проведём окружности $\omega(A_1, A_1A)$ и $\omega_1(A, AA_1)$, и пусть B — одна из точек их пересечения (рис. 215). Строим далее окружность $\omega_2(B, BA_1)$ и отмечаем точку C её пересечения с окружностью ω, отличную от A. Наконец, проводим окружность $\omega_3(C, CA_1)$, и пусть A_2 — точка её пересечения

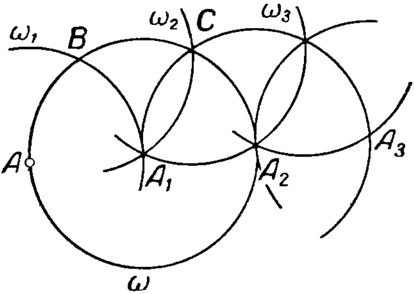

Рис. 215.

с окружностью ω, отличная от B. Тогда точки A, A_1 и A_2 расположены на одной прямой и $A_1A_2 = AA_1$, так как точки A, B, C и A_2 представляют четыре последовательные вершины правильного шестиугольника, вписанного в окружность ω. Таким образом $AA_2 = 2AA_1$, т. е. A_2 — первая из искомых точек. Применяя такое же построение к отрезку A_1A_2, получим точку A_3, такую, что $A_2A_3 = A_1A_2$ и, значит, $AA_3 = 3AA_1$ и т. д. (Заметим, что при построении точки A_3 можно использовать уже проведённые окружности ω и ω_3.)

Задача 2. Построить $\frac{1}{n}$ часть заданного отрезка.

Пусть A и B — две данные точки. Находится такая точка C отрезка AB, чтобы $AC = \frac{1}{n} AB$. Пусть (рис. 216) $AA_n = n \cdot AB$ (на рисунке $n = 3$). Строим окружности $\omega_1(A, AB)$ и $\omega_2(A_n, A_nA)$, и пусть M и N — точки их пересечения. Искомая точка C может быть получена теперь как точка пересечения окружностей (M, MA) и (N, NA), отличная от A. В самом деле:

1) Отрезок MN — общая хорда двух окружностей ω_1 и ω_2. Поэтому линия центров этих окружностей AA_n перпендикулярна отрезку MN и проходит через его середину.

Отсюда и вытекает, что на прямой AA_n лежат все точки, равноудалённые от точек M и N, в частности точка C.

2) $\triangle AMC \backsim \triangle AA_nM$, так как они оба равнобедренные и имеют один и тот же угол при основании (угол A). Поэтому $AC : AM = AM : AA_n$ или $AC : AB = AB : AA_n = \frac{1}{n}$.

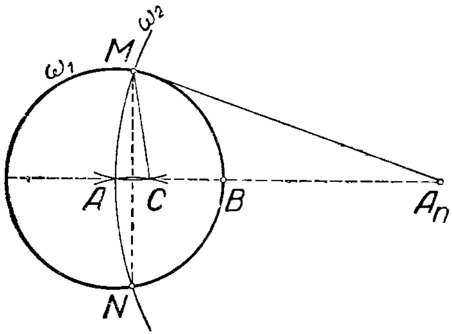

Рис. 216.

Задача 3. Даны три точки A, B и C. Пользуясь только циркулем, установить, лежат ли эти точки на одной прямой.

Проведём окружности $\omega_1(A, AC)$ и $\omega_2(B, BC)$. В силу аксиомы 2, гл. I, § 1 можно считать построенным пересечение этих окружностей. Эти окружности имеют общую точку C. Если точка C является

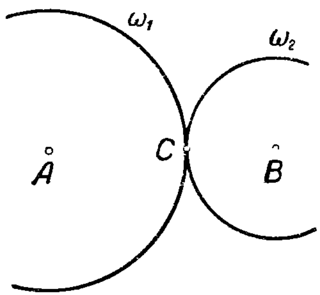

Рис. 217.

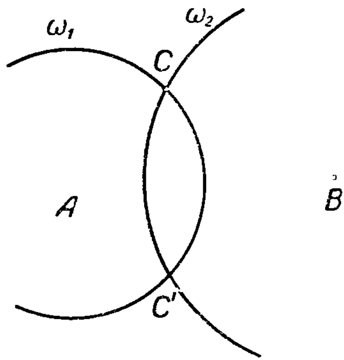

Рис. 218.

единственной их общей точкой (рис. 217), то окружности эти касаются и точка C лежит на прямой AB. Если же окружности ω_1 и ω_2 имеют две общие точки (рис. 218), то точка C не лежит на прямой AB, так как точки пересечения двух окружностей симметричны относительно линии центров.

Во многих случаях построения, производимые посредством циркуля, оказываются значительно точнее, чем построения, производимые с привлечением линейки. Это давно уже было обнаружено при практических измерениях и построениях (например, в техническом черчении, при разметке делительных кругов астрономических инструментов и т. п.). Итальянский геометр Лоренцо Маскерони (1750—1800) занялся в своё время исследованием конструктивных возможностей циркуля, посвятив этому вопросу специальную книгу „Геометрия циркуля“ (1797). Недавно (в 1928 г.) была обнаружена книга датского геометра Георга Мора (1640—1697), написанная ещё в 1672 г. под названием „*Датский Евклид*“. В этой работе также разработана теория геометрических построений, производимых исключительно циркулем.

§ 2. Теорема Мора — Маскерони

Рассмотренные в § 1 задачи характерны тем, что искомыми фигурами являются точки. Ясно, что никакая задача, где требуется провести какую-либо прямую, не может быть решена исключительно циркулем: искомая прямая не может быть в действительности проведена, если разрешено употреблять только циркуль. Но положение прямой на плоскости определяется любыми двумя её точками. Поэтому естественно считать, что прямая в известном смысле уже найдена, как только удалось построить две её точки. Такая точка зрения находится в соответствии с теоретическими принципами геометрии и во многих случаях удовлетворяет практическим потребностям чертёжника или геодезиста. Круг задач, разрешимых с помощью циркуля, при такой постановке вопроса значительно расширяется. Например, циркуль позволяет разделить пополам данный угол или найти перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку, так как в этих задачах линейка употребляется только для выполнения последней операции — для вычерчивания прямой.

Мор (в 1672 г.), а затем (в 1797 г.) Маскерони пришли к выводу, что все геометрические задачи на построение, решаемые при свободном пользовании циркулем и линейкой, могут быть решены исключительно циркулем.

Приведём доказательство этой интересной теоремы. Чтобы избежать недоразумений, которые часто возникают на почве того, что циркулем нельзя, конечно, строить прямые и отрезки, будем формулировать теорему Мора — Маскерони так:

Любая геометрическая задача на построение фигуры из конечного числа точек, разрешимая при наличии циркуля и линейки, может быть решена при наличии только циркуля.

При этом имеется в виду, что данная фигура состоит только из конечного числа точек, окружностей и их дуг, прямых, отрезков и лучей. Без этой оговорки теорема также может привести к недоразумению. Например, если на чертеже проведена синусоида и даны две точки A и B, то нельзя утверждать, что при наличии только циркуля можно построить точки пересечения этой линии с прямой AB, хотя при наличии линейки эта задача, очевидно, разрешима (если точки пересечения существуют).

Условимся в этом параграфе называть прямую *известной*, если построены какие-либо две её точки. Отрезок назовём *известным*, если построены его концы, а луч — если построены его начало и какая-либо принадлежащая ему точка.

Ясно, что „известная“ прямая не является построенной: она может быть построена, если мы располагаем линейкой, но циркуль не даёт возможности построить „известную“ прямую.

Пусть, отправляясь от некоторой данной фигуры, оказалось возможным построить некоторую фигуру Ф, состоящую из конечного числа точек, пользуясь циркулем и линейкой. Наша задача — установить, что все точки фигуры Ф можно построить, употребляя для построений исключительно циркуль.

Построение фигуры Ф с помощью циркуля и линейки состоит в том, что устанавливается конечная последовательность *основных* (для циркуля и линейки) построений (см. гл. I § 3), в результате выполнения которых будет построена фигура Ф.

Решая задачу с помощью циркуля и линейки, мы получаем точки лишь при выполнении следующих построений:

(1). Построение точки пересечения двух известных прямых (которые для этого предварительно строятся).

(2). Построение общих точек построенной окружности и известной прямой (для чего эта известная прямая строится на одном из предыдущих этапов построения).

(3). Построение общих точек двух построенных окружностей.

(4). Построение любого конечного числа точек, принадлежащих известной прямой (или известному лучу, или известному отрезку), для чего эта прямая предварительно строится.

(5). Построение любого конечного числа точек, принадлежащих построенной окружности (или дуге окружности).

(6). Построение точки, заведомо не принадлежащей соединению конечного числа построенных точек, построенных окружностей (или дуг окружностей) и известных прямых (для чего известные прямые предварительно строятся).

Понятно, что для выполнения построений (3) и (5) достаточно располагать только циркулем. Остаётся доказать, что и другие построения, указанные в этом списке, т. е. построения (1), (2), (4), (6), также выполнимы исключительно циркулем.

Иными словами, мы должны доказать, что при наличии только циркуля можно выполнить следующие построения:

(1′). Построить точку пересечения двух известных непараллельных прямых (не строя этих прямых).

(2′). Построить точки пересечения построенной окружности и известной прямой (если такие точки существуют).

(4′). Построить точки, принадлежащие известной прямой.

(6′). Построить точки, заведомо не принадлежащие соединению конечного числа построенных точек, построенных окружностей и известных прямых.

Чтобы доказать выполнимость построений (1′), (2′), (4′) и (6′) исключительно циркулем, решим предварительно следующую задачу:

Известны отрезки a, b и c; построить, пользуясь только циркулем, четвёртый пропорциональный отрезок, т. е. такой отрезок x, чтобы $a:b=c:x$.

Можно предполагать, что $a \neq b$, так как в случае $a=b$ задача тривиальна, потому что $x=c$.

Изберём на плоскости произвольную точку O и проведём окружность $\omega(O, a)$ (рис. 219).

Построим также концентрическую ей окружность $\omega'(O, b)$. Изберём произвольно точку A на окружности ω и точку A' на окружности ω'. Пусть B — точка пересечения окружности ω с окружностью (A, c), а B' — точка пересечения окружности ω' с окружностью (B, AA') (такая, что треугольники AOA' и BOB' одинаково ориентированы). Теперь $\triangle AOA' = \triangle BOB'$ по трём сторонам, так что $\angle AOA' = \angle BOB'$. Отсюда вытекает, что $\angle AOB = \angle A'OB'$. Следовательно, равнобедренный треугольник AOB подобен равнобедренному треугольнику $A'OB'$, так что $AO : A'O = AB : A'B'$ или, по построению, $a : b = c : A'B'$. Таким образом, отрезок $A'B'$ искомый.

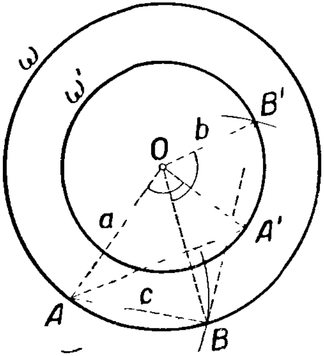

Рис. 219.

Примечание. Описанный здесь способ построения четвёртого пропорционального отрезка не может быть применён, если $c > 2a$, так как в этом случае окружности ω и (A, c) не имеют общих точек. Если при этом $b \leqslant 2a$, то в пропорции $a : b = c : x$, а следовательно и в ходе построения, можно поменять местами отрезки b и c. Если же $c > 2a$ и одновременно $b > 2a$, то строят отрезок $a' = n \cdot a$ такой, что $a' > c$. После этого строят отрезок $b' = nb$. Искомый отрезок x удовлетворяет условию $a' : b' = c : x$ и может быть построен указанным ранее способом.

Переходим к рассмотрению основных построений (1′), (2′), (4′) и (6′).

Построение (1′). Даны четыре точки A, B, C и D. Построить точку пересечения прямых AB и CD, пользуясь только циркулем.

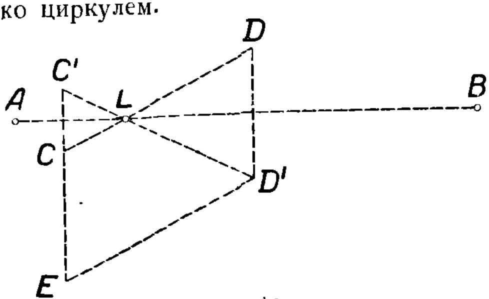

Рис. 220.

Допустим, что задача решена и точка L (рис. 220) искомая. Построим точки C', D', симметричные точкам C, D относительно прямой AB. Искомую точку пересечения прямых AB

и CD можно рассматривать теперь как точку пересечения прямых CD и $C'D'$. Если $CDD'E$ — параллелограмм, то точки C, C' и E лежат на одной прямой. Точка E может быть построена как точка пересечения окружностей (C, DD') и (D', DC).

Из подобия треугольников CLC' и $ED'C'$ видно, что $C'E : C'D' = C'C : C'L$. Поэтому отрезок $C'L$ может быть построен как 4-й пропорциональный к трём известным отрезкам $C'E$, $C'D'$ и $C'C$. Искомая точка L найдётся после этого в пересечении окружностей $(C', C'L)$ и $(C, C'L)$.

Если прямые AB и CD окажутся перпендикулярными (CC' и DD' на одной прямой), то решение задачи упрощается: искомая точка L может быть построена как середина отрезка CC'.

Построение (2′). Даны две точки A и B и окружность (O, r). Требуется построить общие точки прямой AB и окружности (O, r), не проводя прямой AB.

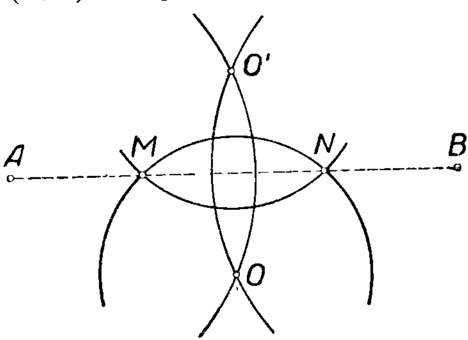

Рис. 221.

Пусть O' (рис. 221) — точка, симметричная с точкой O относительно AB. Обозначим через M и N точки пересечения окружности (O', r) с окружностью (O, r). Так как каждая из этих точек одинаково удалена от точек O и O', то эти точки располагаются на прямой AB, которая служит симметралью отрезка OO'. Значит, M и N — искомые точки. Если окружности (O, r) и (O', r) касаются, то их общая точка является искомой.

Построение (2′) несколько усложняется, если точка O расположена на прямой AB: в этом случае точки O и O' сольются и описанное построение не проходит. При таких условиях придётся воспользоваться следующей вспомогательной задачей.

Задача. Построить середину данной дуги окружности.

Пусть (O, r) — данная окружность, AB — данная дуга этой окружности (рис. 222). Дополним фигуру ABO до параллелограмма $ABOC$ и до параллелограмма $ABDO$. Для этого достаточно провести окружность (O, AB) и пересечь её окружностями (A, r) и (B, r). Пусть E — одна из точек пересечения окружностей (C, CB) и (D, DA). Проводим окружность (C, OE) до пересечения с данной дугой AB в точке F. Тогда F — середина дуги AB. Для доказательства этого обозначим искомую середину дуги AB буквой X. Тогда $CX^2 = CO^2 + r^2$. С другой стороны, по известному свойству параллелограмма получим: $2AB^2 + 2AC^2 = CB^2 + AO^2$, откуда $CB^2 = 2AB^2 + r^2$. Следовательно, $OE^2 = CE^2 - CO^2 = CB^2 - AB^2 = AB^2 + r^2 = CO^2 + r^2$. Значит, $CF^2 = CO^2 + r^2$, так как $CF = OE$. Таким образом, $CX = CF$, откуда следует, что точка F совпадает с серединой дуги AB.

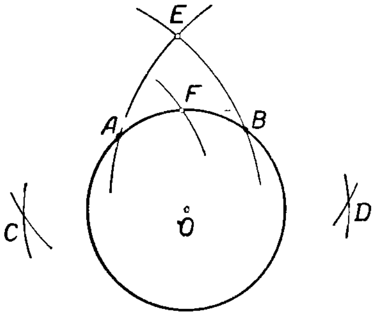

Рис. 222.

Пользуясь этой вспомогательной задачей, можно выполнить построение (2′) в случае, если прямая AB проходит через центр O данной окружности (O, r).

Для этого изберём на данной окружности (O, r) произвольную точку C (рис. 223) и проводим окружность (A, AC). Пусть C' — вторая точка пересечения этой окружности с данной окружностью. Тогда середины M и N обеих дуг CC' окружности (O, r) и будут искомыми точками пересечения прямой AB с окружностью (O, r). Может, конечно, случиться, что точка C' совпадёт с точкой C. В этом случае точка C будет одной из искомых точек. Для построения второй искомой точки достаточно удвоить отрезок CO.

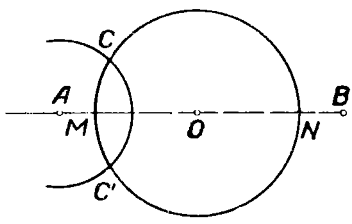

Рис. 223.

Построение (4′). Пусть известны две точки A и B. Требуется построить произвольное количество точек прямой AB, не проводя этой прямой. Изберём произвольную точку C плоскости. Если она окажется расположенной на прямой AB, то эта точка искомая. Допустим, что это не так.

Тогда построим (рис. 224) точку C_1, симметричную с точкой C относительно прямой AB. После этого для получения новых точек прямой AB (на рисунке точки M_1 и M_2) достаточно провести окружности (C, r) и (C_1, r), где r — произвольный отрезок, больший, чем $\frac{1}{2}CC_1$ (например, отрезок CC_1), и построить точки их пересечения; эти точки заведомо принадлежат прямой AB, так как каждая из них одинаково удалена от точек C и C_1.

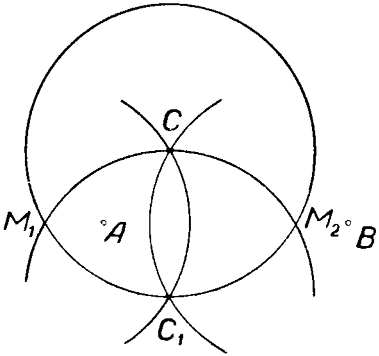

Рис. 224.

Замечание. Описанный здесь приём можно было и не приводить, так как задачи 1 и 2 этого параграфа уже дают возможность построения произвольного числа точек на прямой, заданной двумя точками.

Построение (6′). Пусть построены k точек A_1, $A_2, \ldots, A_k$ и n окружностей ω_1, ω_2, ω_3, .., ω_n, а также известны m прямых a_1, a_2, a_3, ..., a_m. Ищется точка, не совпадающая ни с одной из этих точек и не принадлежащая ни одной из этих прямых или окружностей.

Изберём произвольную точку A и какую-либо точку B, не лежащую ни на одной из построенных окружностей (для чего не требуется ни линейки, ни циркуля). Тогда окружность ω_{n+1} (A, AB) не совпадает ни с одной из окружностей ω_1, ω_2, ..., ω_n. Этой окружности могут принадлежать некоторые из точек A_1, A_2, ..., A_k, на ней могут оказаться также точки пересечения с заданными окружностями. Изберём на окружности ω_{n+1}, сверх этих, ещё $2m+1$ точек. Тогда по крайней мере одна из этих $2m+1$ точек удовлетворяет требованиям задачи, так как прямые a_1, a_2, ..., a_m могут встретиться с окружностью ω_{n+1} самое большее в $2m$ точках. Путём конечного числа испытаний (см. § 1, задачу 3) среди $2m+1$ избранных точек можно выделить искомую.

Теорема Мора — Маскерони, таким образом, доказана.

Для доказательства теоремы Мора — Маскерони можно воспользоваться также свойствами инверсии. Такой метод доказательства применяется в книге Адлера [I].

Общий метод решения какой-либо геометрической задачи на построение исключительно циркулем состоит в том, что намечают план её решения посредством циркуля и линейки, а затем пользуются изложенными здесь способами замены построений циркулем и линейкой построениями исключительно циркулем.

§ 3. Построения одной линейкой

Геодезисты в своей работе тесно связаны с геометрическими построениями и измерениями, причём в практике геодезических работ приходится пользоваться почти исключительно проведением прямых линий.

В связи с этим внимание математиков ещё в XVII в. было привлечено к изучению геометрических построений, производимых исключительно линейкой. Такого рода построения рассматривал упоминавшийся уже нами Мор (в не дошедшей до нас книге „Euclides curiosus“, о которой упоминается в переписке некоторых математиков того времени). Ряд задач на построение с линейкой рассматривали: И. Ламберт (в 1774 г.), Брианшон (1783—1864), написавший книгу „Приложения теории трансверсалей“ (в 1818 г.), предназначенную для лиц, занимающихся землемерными работами, Понселе (1788—1867) в связи с его исследованиями по проективной геометрии.

Наиболее полные исследования в этой области произведены швейцарским геометром Я. Штейнером (1796—1863), который изложил их в известном сочинении „Геометрические построения, производимые с помощью прямой линии и неподвижного круга“ (1833).

Как уже отмечалось (гл. VII, § 1), пользуясь только линейкой, можно решить очень ограниченный круг геометрических задач на построение. Нельзя, например, пользуясь исключительно линейкой, разделить отрезок пополам или провести параллель к данной прямой. Однако эти и многие другие задачи могут оказаться разрешимыми исключительно линейкой, если на плоскости дана некоторая вспомогательная фигура. Рассмотрим некоторые построения такого рода.

Для этого нам понадобится одно вспомогательное предложение („лемма о трапеции“).

Прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения продолженных её боковых сторон, делит оба основания трапеции пополам.

Доказательство. Пусть $ABCD$ (рис. 225) — данная трапеция, AB и CD — её основания, O — точка пересечения диагоналей, P — точка пересечения продолженных боковых сторон, M и N — точки пересечения прямой OP с основаниями трапеции. Из подобия треугольников AOM и CON следует, что $AM : CN = OM : ON$, а из подобия треугольников BOM и DON следует, что $BM : DN = OM : ON$. Из двух последних пропорций следует:

$$AM \cdot DN = CN \cdot BM. \quad (1)$$

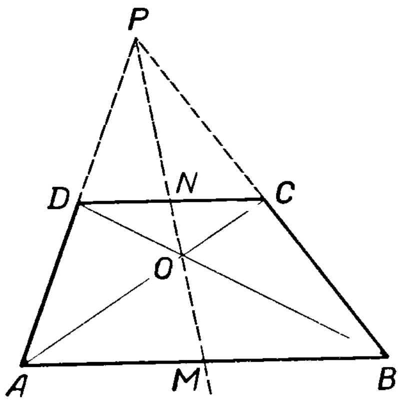

Рис. 225.

Из подобия треугольников APM и DPN следует, что $AM : DN = PM : PN$, а из подобия треугольников BPM и CPN вытекает, что $BM : CN = PM : PN$. Из этих двух пропорций заключаем, что

$$AM \cdot CN = DN \cdot BM. \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) заключаем, что $AM^2 = BM^2$, откуда $AM = BM$. Теперь уже не составляет труда убедиться, что $DN = CN$.

Решим теперь несколько задач, пользуясь исключительно линейкой.

Задача 1. Даны две параллельные прямые a и b и на одной из них, например a, отрезок AB. Построить середину этого отрезка.

Изберём произвольную точку P, лежащую вне полосы, ограниченной заданными прямыми (рис. 226). Проведём прямые PA и PB и отметим точки D и C их пересечения с прямой b. Пусть O — точка пересечения прямых AC и BD. Тогда, согласно предыдущей лемме, прямая PO пересечёт отрезок AB в его середине M.

Задача 2. Зная середину M данного отрезка AB, провести через данную точку C прямую, параллельную AB.

Изберём на прямой BC, вне отрезка BC, произвольную точку P (рис. 227) и соединим эту точку с точками A и M.

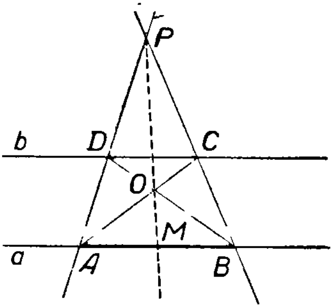

Рис. 226.

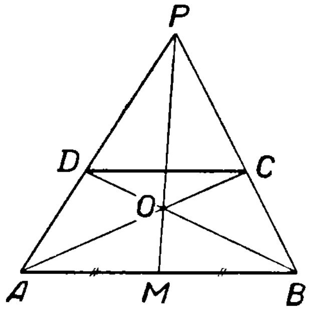

Рис. 227.

Пусть O — точка пересечения прямых PM и AC, D — точка пересечения прямых AP и OB. Тогда прямая CD искомая. Доказательство проводится на основании леммы о трапеции по методу „от противного".

Задача 3. Через центр данного параллелограмма провести прямую параллельно его стороне.

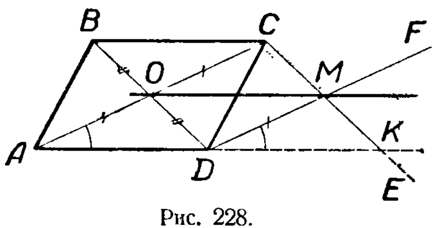

Рис. 228.

Пусть $ABCD$ (рис. 228) — данный параллелограмм, O — его центр. Учтя, что $AO = CO$ и $BO = DO$, можно воспользоваться предыдущей задачей и провести $CE \parallel BD$ и $DF \parallel AC$. Если M — точка пересечения прямых CE и DF, то прямая OM параллельна стороне AD.

Для доказательства рассмотрим треугольник ACK, где K — точка пересечения прямых AD и CM. Треугольник DKM равен треугольнику ADO по двум сторонам и углу между ними. А поэтому $KM = OD = CM$. Следовательно, прямая OM служит средней линией треугольника ACK и поэтому параллельна его основанию.

§ 4. Теорема Штейнера

Пользуясь только линейкой, нельзя решить всякую задачу, разрешимую с помощью циркуля и линейки. Но исследования этого вопроса показали, что для решения как угодно сложной геометрической задачи на построение, разрешимой циркулем и линейкой, достаточно воспользоваться циркулем не более одного раза. Точнее говоря: *всякая геометрическая задача на построение фигуры, состоящей из конечного числа точек, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена одной линейкой, если на плоскости построена какая-либо окружность и отмечен её центр.* При этом предполагается, что данная фигура состоит только из конечного числа точек, прямых, лучей, отрезков и дуг окружностей. Это предложение было установлено швейцарским математиком Я. Штейнером в 1833 г. Без доказательства оно было приведено ещё в 1822 г. французским геометром Понселе в его „Трактате о проективных свойствах фигур“. Поэтому эту теорему называют иногда теоремой Понселе — Штейнера.

Доказательство теоремы Штейнера проводится аналогично тому, как было проведено выше доказательство теоремы Мора — Маскерони.

Условимся называть окружность известной, если построен её центр и построены концы отрезка, равного радиусу этой окружности. Если пользоваться только линейкой, то такая окружность не может быть построена, хотя с общегеометрической точки зрения она вполне определена этими данными.

Рассуждая так же, как в § 2, мы заметим, что для доказательства теоремы Штейнера достаточно установить, что при наличии линейки и построенной окружности с отмеченным центром (которую мы в дальнейшем называем вспомогательной или штейнеровой) можно выполнить следующие построения.

(2″). Построение общих точек известной окружности и построенной прямой (если такие точки существуют).

(3″). Построение общих точек двух известных окружностей (если такие точки существуют).

(5″). Построение любого конечного числа точек, принадлежащих известной окружности.

(6″). Построение точки, не принадлежащей соединению конечного числа построенных точек, построенных прямых и известных окружностей.

Выполнимость остальных построений из числа построений (1) — (6), приведённых в § 2, в условиях теоремы Штейнера не вызывает сомнений.

Перейдём к рассмотрению интересующих нас построений.

Решим предварительно несколько вспомогательных задач.

1-я вспомогательная задача. Через данную точку P провести прямую, параллельную данной прямой a.

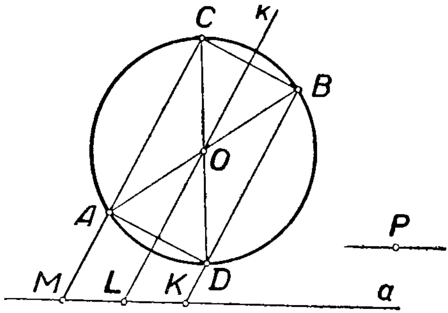

Рис. 229.

Пусть (рис. 229) O — центр вспомогательной окружности. Выберем на прямой a произвольную точку M. Выберем на вспомогательной окружности такую точку A, чтобы прямая MA не была касательной и не проходила через точку O. Прямая MA пересечёт вспомогательную окружность ещё в одной точке C. Проведём через A и C два диаметра AB и CD. Ясно, что четырёхугольник $ACBD$ — параллелограмм (даже прямоугольник). Пусть Ok — прямая, параллельная AC (см. задачу 3, § 3). Если прямые AC, Ok и BD пересекают данную прямую a соответственно в точках M, L и K, то $ML = LK$, так как $AO = BO$. Для выполнения требуемого построения остаётся применить задачу 2, § 3.

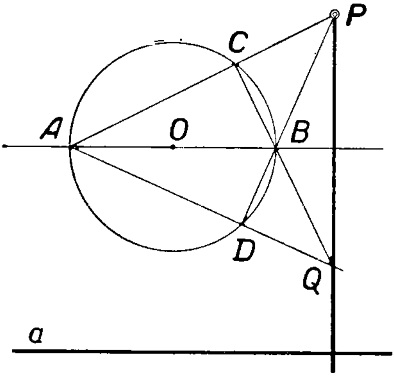

Рис. 230.

Если прямая a проходит через центр вспомогательной окружности (или хотя бы пересекает её), то решение задачи, очевидно, упрощается.

2-я вспомогательная задача. Через данную точку P провести прямую, перпендикулярную данной прямой a (рис. 230). Проведём прежде всего диаметр AB вспомогательной окружности, параллельный данной прямой (см. предыдущую задачу). Пусть прямые PA и PB пересекаются со вспомогательной окружностью в точках C и D. Обозначая через Q точку пересечения прямых BC и AD, найдём, что $PQ \perp AB$, а следовательно, $PQ \perp a$. Действительно, прямые CQ и DP служат высотами треугольника APQ. Следовательно, AB — третья его высота, так как все три высоты треугольника должны пройти через одну точку.

Замечание. Описанное построение невозможно в двух случаях. 1) Если прямая PB (или прямая PA) касается окружности. В этом случае прямая PB (соответственно PA) является искомой.

2) Если точка P расположена на окружности или на прямой AB. В этом случае изберём вспомогательную точку P', не принадлежащую ни окружности, ни прямой AB, проведём через P' перпендикуляр к данной прямой a указанным способом, а затем проведём через точку P прямую, параллельную этому перпендикуляру.

3-я вспомогательная задача. На данной прямой a отложить от данной точки P отрезок, равный данному отрезку AB.

Рис. 231.

Пусть O — центр вспомогательной окружности (рис. 231). Строим параллелограмм $OABC$ (см. 1-ю вспомогательную задачу). Пусть луч OC встречает вспомогательную окружность в точке M, а прямая OL, проведённая через O параллельно прямой a (задача 1), встречает окружность в точке N. Пусть, далее, прямая, проведённая через точку C параллельно прямой MN, встречает прямую OL в точке Q. Прямая QR, проведённая параллельно OP, встречает прямую a в искомой точке X. Действительно: $PX = OQ = OC = AB$.

Переходим к выполнению построений (2″), (3″), (5″) и (6″).

Построение (2″). Построение общих точек прямой и известной окружности.

Пусть O_1 — центр данной окружности, P_1 — данная её точка, $\omega(O, r)$ — вспомогательная окружность, a_1 — данная прямая (рис. 232). Требуется построить общие точки окружности (O_1, O_1P_1) с прямой a_1.

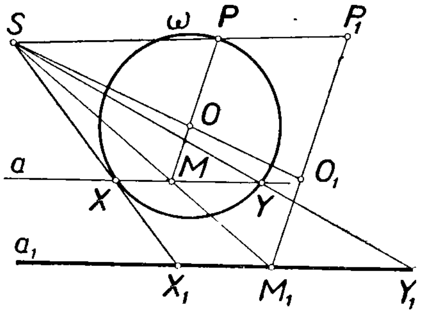

Рис. 232.

Идея построения состоит в использовании гомотетии данной и вспомогательной окружности. Для построения центра S этой гомотетии достаточно провести радиус OP вспомогательной окружности параллельно O_1P_1 и построить точку пересечения прямых O_1O и P_1P. Пусть прямая O_1P_1 пересекает данную прямую a_1 в точке M_1. В пересечении OP с SM_1 найдётся прообраз M точки M_1 в упомянутой гомотетии, а прямая a, проведённая через M параллельно a_1, будет прообразом прямой a_1. В пересечении прямой a с окружностью ω найдутся прообразы X и Y искомых точек, а сами искомые точки X_1 и Y_1 будут точками пересечения прямых SX и SY с прямой a_1. Может оказаться, что прямая a не пересечёт окружность ω. Это будет означать, что данная окружность (O_1, O_1P_1) не встречается с прямой a_1. Если прямая a коснётся ω, то и прямая a_1 будет касаться окружности ω_1.

Построение (5″). Построение произвольного конечного числа точек на известной окружности.

Умея строить точки пересечения прямой и окружности, можно построить сколько угодно точек на окружности, заданной центром и точкой на ней: достаточно пересечь эту окружность произвольной прямой. Ещё проще воспользоваться для этой цели 3-й вспомогательной задачей: провести любую прямую через центр заданной окружности и отложить на этой прямой от центра отрезок, равный радиусу.

Построение (3″). Построение общих точек двух известных окружностей.

Как известно (см. гл. II, § 7), эти точки являются точками пересечения данных окружностей с их радикальной осью. Таким образом, построение (3″) сводится к задаче о построении радикальной оси двух известных окружностей и к построению (2″). Радикальная ось двух окружностей перпендикулярна к линии их центров и пересекает её в точке P, для которой разность квадратов расстояний от центров окружностей равна разности квадратов радиусов этих окружностей (см. гл. II, § 7). Так как мы умеем уже провести перпендикуляр к данной прямой через данную точку (см. 2-ю вспомогательную задачу), то остаётся только указать способ построения точки P.

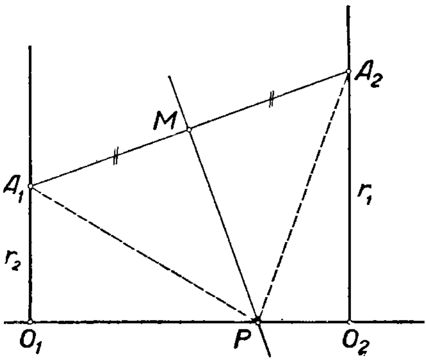

Рис. 233.

Пусть (O_1, r_1) и (O_2, r_2) — данные окружности (рис. 233). В точках O_1 и O_2 проведём перпендикуляр к линии их центров (2-я вспомогательная задача). Отложим на них соответственно отрезки $O_1A_1 = r_2$ и $O_2A_2 = r_1$ (3-я вспомогательная задача).

Пусть M — середина отрезка A_1A_2 (см. 1-ю вспомогательную задачу и задачу 1 из § 3).

Пусть прямая, проведённая через точку M перпендикулярно A_1A_2, пересекает линию центров O_1O_2 в точке P.

Эта точка — искомая. Действительно: $O_1P^2 = A_1P^2 - r_2^2$ и $O_2P^2 = A_2P^2 - r_1^2$. Но так как $A_1P = A_2P$, то $O_1P^2 - O_2P^2 = r_1^2 - r_2^2$.

Построение (6″). Построение точки, заведомо не принадлежащей какой-либо известной фигуре.

Осуществимость основного построения (6″) доказывается аналогично тому, как это было сделано в § 2. Выбираем две точки, не принадлежащие уже построенным прямым, и строим соединяющую их прямую a. На этой прямой могут оказаться расположенными некоторые из построенных точек (что будет установлено непосредственно). Кроме того, могут быть построены все точки пересечения прямой a с построенными прямыми и с известными окружностями (построение (2″)). После этого можно построить на прямой a точку, отличную от всех упомянутых здесь её точек. Полученная точка будет искомой. Теорема Штейнера доказана.

Советский математик Д. Д. Мордухай-Болтовской (1876—1951) в 1910 г. доказал, что теорема Штейнера остаётся в силе, если дана не вся вспомогательная окружность, а как угодно малая её дуга (и отмечен центр окружности). Доказано также, что эта дуга окружности может быть заменена дугой эллипса или гиперболы с отмеченным центром и фокусом или дугой параболы с отмеченной вершиной и фокусом (Н. В. Наумович, 1936 г.).

Выше (гл. VII, § 1) уже было отмечено, что, пользуясь только линейкой, нельзя построить центр начерченной окружности. При этом предполагалось, что на плоскости нет никаких других построенных фигур. В связи с этим интересно отметить, что если построены две пересекающиеся (или касающиеся) окружности, то центр каждой из них может быть построен с помощью только линейки (см. об этом в книге Радемахера и Теплица „Числа и фигуры“, стр. 206—218 и 234—236).

§ 5. Построения с недоступными точками

Общая теория геометрических построений с помощью циркуля и линейки развивается обычно в предположении, что любые две точки плоскости можно соединить прямой, что можно провести окружность, центр которой находится в любой точке и радиус которой имеет любые размеры, что может быть построена и в дальнейшем использована точка, в которой пересекаются две построенные линии. В практических условиях эти предположения могут и не выполняться. В частности, этому могут препятствовать размеры чертежа, в силу чего некоторые элементы данных или искомых фигур могут оказаться за его пределами, как это в действительности нередко случается в чертёжной практике. При измерениях и построениях на местности не во всякую точку можно поместить геодезический инструмент и не всякий прямолинейный путь доступен для прохождения. В связи с этим обстоятельством возникла и развилась математическая теория геометрических построений с недоступными элементами.

Простейшие задачи на построения с недоступными элементами рассматривал ещё Ламберт в книге „Свободная перспектива“ (1774).

Появление недоступных элементов существенно изменяет ход геометрических построений и обычно усложняет их. Однако можно доказать элементарными методами, что появление на плоскости нескольких недоступных точек не может перевести геометрическую задачу на построение циркулем и линейкой из класса разрешимых в класс неразрешимых. Основы такого доказательства изложены в [3].

Мы не ставим себе задачу дать полный очерк теории геометрических построений с недоступными элементами. Такая теория могла бы быть развита наиболее естественным образом на базе основных теорем проективной геометрии (свойства полного четырёхвершинника, теорема Дезарга, теорема Паппа — Паскаля, свойства поляр и др.). Ограничимся некоторыми разъяснениями и примерами.

Будем называть точку *недоступной*, если к ней нельзя применить аксиомы конструктивной геометрии, в частности аксиомы линейки или циркуля. Фигура считается *недоступной*, если все её точки недоступны. Недоступная точка считается *известной*, если построены отрезки двух прямых, пересекающихся в этой точке. На рисунке 234 точка P определена двумя прямыми a и b; обозначим её $P(a, b)$.

Рассмотрим некоторые элементарные геометрические задачи на построение с недоступными точками.

Задача 1. Через данную точку M (рис. 235) провести прямую MP, если $P(a, b)$ — известная недоступная точка. Проведём через M какую-либо прямую, пересекающую да́нные прямые a и b соответственно в точках A и B. Проведём ещё какую-либо прямую, параллельную AB, и пусть она встречается с a и b соответственно в точках A' и B'. Пусть точка M' делит отрезок $A'B'$ в том же

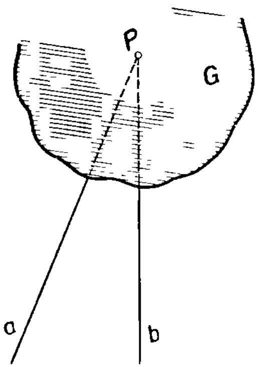

Рис. 234.

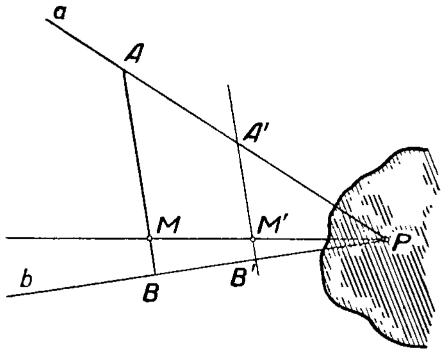

Рис. 235.

отношении, в каком точка M делит отрезок AB. Тогда прямая MM' искомая

Задача 2. Разделить в данном отношении $m:n$ (m и n — данные отрезки) отрезок AB, один конец которого (например, B) недоступен.

Проведём какой-либо луч AL (рис. 236) и построим на нём $AM=m$, $MN=n$. Строим прямую BN (см. задачу 1) и проводим $MM' \parallel BN$. Тогда прямая MM' пересекает прямую AB в искомой точке X.

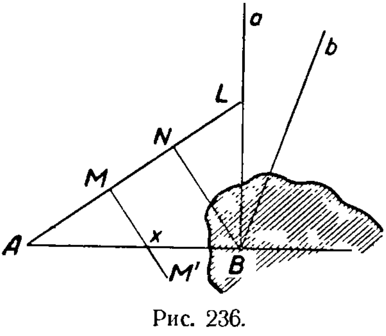

Рис. 236.

Построение это можно провести и в том случае, когда оба конца данного отрезка AB недоступны: вне отрезка AB выбирается произвольная точка N, отрезок AN делится в данном отношении указанным способом, а затем повторяется вышеописанное построение.

Задача 3. Даны три точки A, B и C, лежащие на одной прямой, причём точка C недоступна. Найти такие отрезки

m и n, чтобы отношение $AC:BC$ было равно отношению $m:n$.

Пусть C' — произвольная точка на прямой c, проходящей через недоступную точку C (рис. 237). Проводим $BM \parallel CC'$. Пусть прямая BM пересечёт AC' в точке B'. Тогда, понятно, искомое отношение $AC:BC = AC':B'C'$.

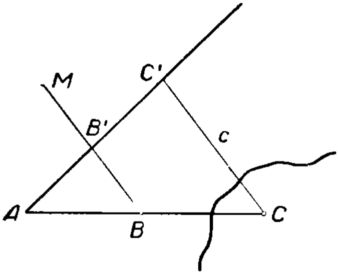

Рис. 237.

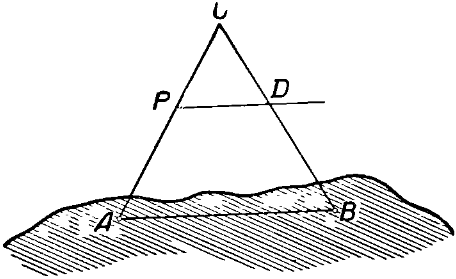

Рис. 238.

Задача 4. A и B две известные недоступные точки. Через данную точку P провести прямую, параллельную прямой AB (рис. 238).

Построим прямую PA (см. задачу 1).

Пусть C — произвольная точка прямой PA. Определим отношение $AC:PC$ (см. задачу 3). Разделим отрезок BC точкой D в таком же отношении (см. задачу 2). Тогда прямая PD искомая, так как $\triangle PCD \backsim \triangle ACB$ в силу наличия у этих треугольников общего угла C и пропорциональности ($AC:PC = BC:DC$) сторон, заключающих этот угол.

К этой задаче легко сводится задача о проведении через данную точку перпендикуляра к прямой, проходящей через две известные недоступные точки.

Задача 5. Разделить пополам угол (a, b), вершина которого недоступна.

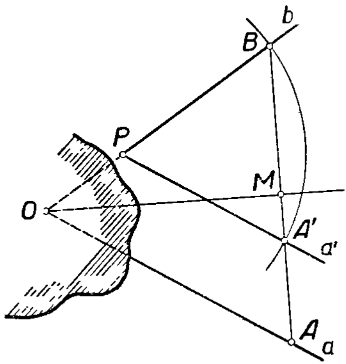

Рис. 239.

Пусть P (рис. 239) — произвольная точка на прямой b. Строим прямую a', проходящую через точку P параллельно прямой a. Из точки P, как из центра, проводим окружность ω произвольного радиуса. Пусть эта окружность пересекает прямые a' и b соответственно в точках A' и B (B и A' — по разные стороны прямой a'). Прямая $A'B$ наклонена к данным прямым a и b под равными углами, так что если она пересекается с прямой a в точке A, то треугольник AOB, где O — вершина данного угла, равнобедренный. Поэтому искомая биссектриса должна проходить через середину M отрезка AB перпендикулярно к прямой AB.

Задача 6. На данной прямой a отложить от известной недоступной её точки A отрезок, равный данному отрезку l.

Пусть b (рис. 240) — вторая прямая, определяющая недоступную точку A. Выберем на прямой b произвольную

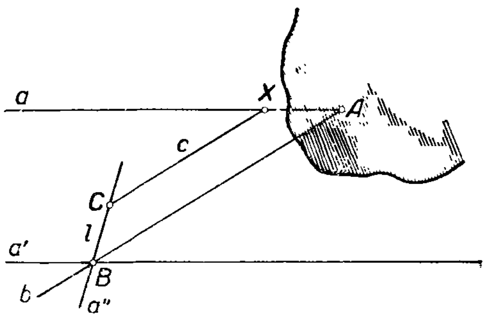

Рис. 240.

точку B и проведём через неё прямую $a' \parallel a$. Строим прямую a'', симметричную с a' относительно b, и откладываем на этой прямой отрезок $BC = l$. Если c — прямая, проведённая через точку C параллельно прямой b, то точка X, в которой эта прямая пересекает прямую a, искомая, т. е. $AX = l$. В самом деле, трапеция $ABCX$ равнобедренная, так как углы при её основании одинаковы.

Комбинируя рассмотренные примеры, можно решить большое количество задач на построение с недоступными элементами.

В качестве общего приёма решения задач на построение с недоступными точками можно пользоваться геометрическими преобразованиями. Если данное преобразование не переводит данную недоступную точку в себя, то её образ вообще говоря, доступен. Поэтому после преобразования задача решается обычными методами. После того как получено соответствующее решение, остаётся применить обратное преобразование, чтобы получить решение для первоначального расположения фигуры.

Пример 1. $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ — две недоступные точки. Построить середину отрезка AB.

Применим метод симметрии.

Пусть S (рис. 241) — произвольная прямая, которую примем за ось симметрии.

Строим прямые a_1', a_2', b_1', b_2', соответственно симметричные прямым a_1, a_2, b_1 и b_2 относительно прямой s. Пусть $a_1' \times a_2' = A'$, $b_1' \times b_2' = B'$. Строим середину отрезка $A'B'$ — точку C'. Точка C, симметричная C' относительно s, искомая, так как равенство отрезков при симметрии сохраняется, причём дважды повторенная симметрия есть тождественное преобразование.

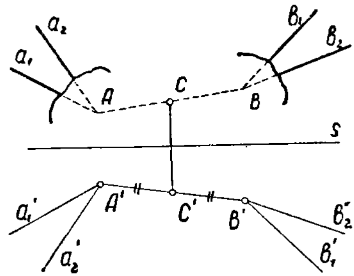

Рис. 241.

Иногда надобность в обратном преобразовании отпадает, как это видно из следующего примера.

Пример 2. Через данную недоступную точку $A(a, b)$ провести прямую, параллельную данной прямой p.

Произведём параллельный перенос данной фигуры на некоторый вектор $\vec{V}$, коллинеарный прямой p. Прямые a и b преобразуются при этом соответственно в прямые a' и b'. Пусть (рис. 242) $a' \times b' \equiv A'$. Прямая, проведённая через A' параллельно p, искомая.

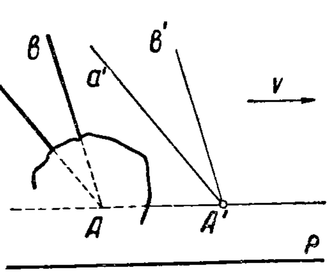

Рис. 242.

Так как в чертёжной практике всегда приходится иметь дело не со всей плоскостью, а лишь с ограниченной её областью (чертёжный лист), то здесь нередко возникают задачи о „построениях на ограниченном куске плоскости“, когда всю остальную часть плоскости приходится рассматривать как недоступную. В этих случаях особенно полезным оказывается преобразование гомотетии, так как оно позволяет „сжать" весь чертёж в произвольном отношении. При соответствующем выборе центра и коэффициента гомотетии можно добиться, чтобы после такого преобразования все, как угодно далёкие, недоступные точки плоскости преобразовались в точки, расположенные в пределах данного куска плоскости.

§ 6. О геометрических построениях с другими средствами

В чертёжной практике для построений широко пользуются угольником, двусторонней линейкой и другими инструментами. Было бы неправильно поэтому рассматривать эти инструменты как не заслуживающие теоретического изучения и считать сочетание циркуля с линейкой единственным теоретически допустимым набором инструментов для геометрических построений.

В настоящее время правильнее всего смотреть на построения с циркулем и линейкой лишь как на один из возможных примеров теории геометрических построений с наперёд заданными средствами, причём этот пример наиболее традиционен. Поэтому нам представляется крайне желательным, чтобы в практике школьного преподавания, наряду с систематическим изучением построений с помощью циркуля и линейки, были затронуты также вопросы о построениях с различными другими инструментами. Учащиеся относятся к вопросам этого рода с живым интересом, и эти вопросы способствуют развитию геометрической инициативы и изобретательности учащихся.

В гл. I, § 4 было показано, как разделить данный отрезок пополам, пользуясь прямым углом или двусторонней линейкой.

Приведём здесь ещё некоторые примеры.

Пример 1. Разделить данный угол пополам, пользуясь только линейкой с параллельными краями.

Решение (рис. 243). Приложить линейку одним краем к одной из сторон угла, а по другому краю провести прямую. Повторить эту операцию для второй стороны угла. Точка пересечения проведённых прямых расположена на биссектрисе данного угла, так что остаётся соединить её с вершиной.

Пример 2. Определить центр начерченной окружности, пользуясь только прямым углом.

Ход решения виден из рисунка 244. Угол два раза помещают вершиной на окружности и отмечают точки пересечения сторон угла с окружностью. Соединяя эти точки попарно, получим два диаметра окружности.

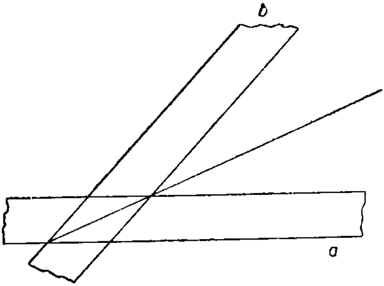

Рис. 243.

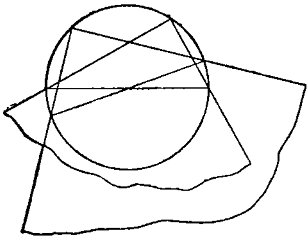
Рис. 244.

Пример 3. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой, пользуясь только данным углом.

Пусть (рис. 245) a — данная прямая, A — данная точка. Расположим данный угол так, чтобы одна из его сторон

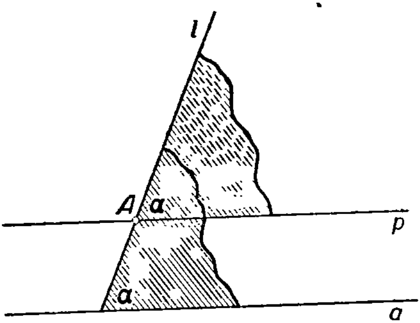

Рис. 245.

совпадала с прямой a, а другая проходила через точку A. Проведём прямую l по второй стороне угла. Передвинем угол вдоль прямой l настолько, чтобы его вершина попала в точку A. После этого достаточно провести по стороне угла, не совпадающей с прямой l, прямую p, которая и будет искомой.

Пример 4. Через данную точку A провести прямую, параллельную данной прямой a, пользуясь только двусторонней линейкой

Выберем на прямой a произвольную точку B (рис. 246). Построим прямую AB. Проведём по одну сторону от прямой AB последовательно две параллельные ей прямые b и c, как это предусмотрено аксиомой B, *б*) (§ 3, гл. I). Пусть вторая из этих прямых, прямая c, пересечёт прямую a в точке C. Пусть прямая AC пересечёт прямую b в точке P, а прямая BP пересечёт прямую c в точке X. Тогда четырёхугольник $ABCX$ есть параллелограм, потому что его диагонали AC и BX взаимно делятся пополам. Поэтому AX — искомая прямая.

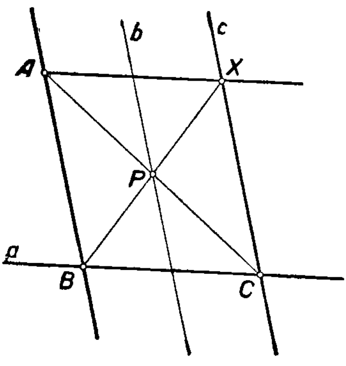

Рис. 246.

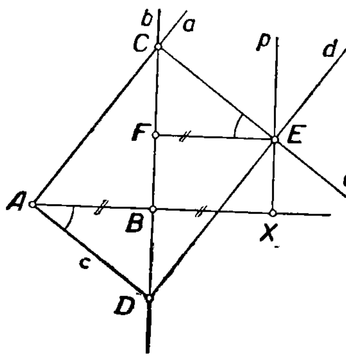

Рис. 247.

Пример 5. Удвоить данный отрезок AB, пользуясь только прямым углом.

Обратимся к построениям *а*), *б*) и *в*) аксиомы Γ (§ 3, гл. I).

Проведём через данную точку A (рис. 247) произвольную прямую a, а через точку B прямую $b \perp AB$ (построения а) и б), аксиома Г). Пусть прямые a и b пересекутся в точке C. Проведём ещё через точку A прямую $c \perp a$, и пусть эта прямая встретится с прямой b в точке D. Проведём через D прямую $d \perp c$, а через C прямую $e \perp a$, и пусть прямые d и e встретятся в точке E. Если теперь X — основание перпендикуляра p к прямой AB, проведённого из точки E, то $BX = AB$, так что $AX = 2AB$, и задача решена. В справедливости последнего соотношения легко убедиться, если построить прямоугольный треугольник CEF. Тогда $\triangle CEF = \triangle DAB$ по гипотенузе и острому углу, так что $AB = EF$. В свою очередь, очевидно, $EF = BX$.

Пример 6. На данной прямой a отложить от данной точки O отрезок, равный данному отрезку AB, пользуясь только прямым углом.

Решение, приведённое в примере 3, позволяет построить параллелограмм $OABB'$ (рис. 248). Пусть, далее, $B'B'' = 2B'O$

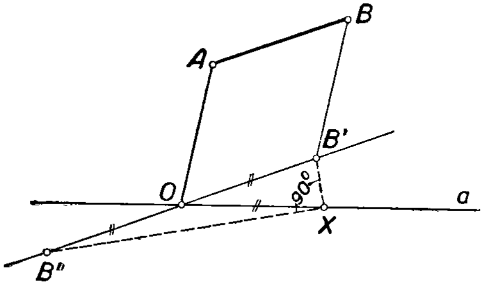

Рис. 248.

(см. пример 5). Пусть X — такая точка прямой a, из которой отрезок $B'B''$ виден под прямым углом (построение в аксиомы Г). Теперь $OX = OB'$, как медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла. А так как $OB' = AB$, то $OX = AB$ и точка X искомая.

Для систематического изучения различных инструментов геометрических построений необходимо прежде всего установить точный список основных построений, выполняемых тем или иным инструментом, как это было сделано нами для некоторых инструментов в § 2, гл. I. После этого обычно выясняют, можно ли тем или иным инструментом выполнить основные построения, производимые циркулем и линейкой.

Таким путём было установлено, что всякая геометрическая задача на построение конечного числа точек, которая может быть решена циркулем и линейкой, может быть решена также исключительно с помощью двусторонней линейки или исключительно с помощью данного угла (см. об этом, например, [I]).

Из большого круга вопросов этого рода мы остановимся здесь подробнее на одном вопросе, близком к школьному курсу геометрии и почти не освещённом в литературе, — на построениях с циркулем и линейкой ограниченных размеров.

Допустим, что размах циркуля не превышает некоторого определённого отрезка r, а линейка имеет определённую длину l. Именно так обстоит дело в действительности, когда проводятся построения с циркулем и линейкой.

Докажем, что *всякая геометрическая задача на построение конечного числа точек, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена циркулем и линейкой ограниченных размеров.*

Для этого приведём прежде всего список основных построений, которые выполняются циркулем и линейкой ограниченных размеров. Построения эти следующие.

1*. Построить отрезок, соединяющий две построенные точки A и B, если $AB \leqslant l$.

2*. Построенный прямолинейный отрезок AB неограниченно продолжить в направлении AB или в направлении BA.

(Точный смысл построения 2* состоит в следующем: если построен отрезок AB, то, каков бы ни был построенный отрезок CD, всегда можно построить такой отрезок AM, содержащий отрезок AB, что $AM > CD$, и такой отрезок BN, содержащий отрезок AB, что $BN > CD$.)

3*. Построить окружность, центр которой находится в построенной точке и радиус которой равен построенному отрезку $r_0 \leqslant r$.

4*. Построить общие точки двух построенных линий (если такие точки существуют).

5*. Построить произвольное конечное число точек, принадлежащих построенной фигуре.

6*. Построить точку, заведомо не принадлежащую некоторой построенной фигуре.

Решим теперь некоторые вспомогательные задачи посредством циркуля и линейки ограниченных размеров. Ради определённости будем предполагать в дальнейшем, что $r < l$.

Задача 1. На построенном прямолинейном отрезке AB отложить от точки A отрезок, равный построенному отрезку CD ($CD < AB$).

Если отрезок CD не превышает r, то решение общеизвестно. В противном случае откладываем на отрезке CD от точки C и на отрезке AB от точки A отрезок r последовательно до тех пор, пока оставшаяся часть отрезка CD не станет меньше r, после чего откладываем на отрезке AB также эту оставшуюся часть.

Задача 2. Построить середину построенного отрезка AB.

Если $AB < 2r$, то можно применить обычный приём.

В противном случае можно отложить на отрезке AB от обоих его концов по отрезку r и искать середину полученного таким образом отрезка A_1B_1 (рис. 249). Такое

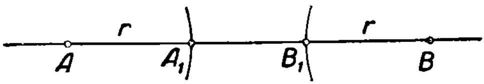

Рис. 249.

„укорачивание" данного отрезка придётся, быть может, произвести несколько раз.

Задача 3. Через построенную точку P провести отрезок прямой, параллельной построенному отрезку AB (рис. 250).

Построим окружность $\omega(P, r_0)$, где $r_0 \leqslant r$ (осн. постр. 3*). Пусть M и N — какие-либо две точки этой окружности, не лежащие на одном диаметре этой окружности (осн. постр. 5*). Очевидно, что по крайней мере одна из прямых PM и PN пересекает прямую AB. Поэтому при достаточном продолжении отрезков PM, PN и AB, каждый в обе стороны (осн. постр. 2*), непременно окажется построенной хотя бы одна из точек пересечения прямой AB с прямой PM или PN. Пусть для определённости PM пересекается с AB в точке C. В пересечении образуется некоторый угол. Остаётся построить при точке P равный ему накрест лежащий угол. Построение угла, равного данному, может быть выполнено общеизвестным способом независимо от ограничений в размерах инструментов.

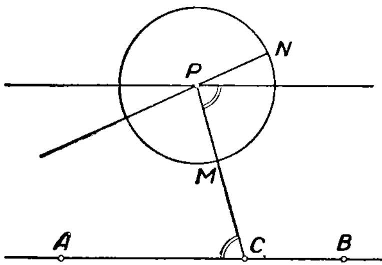

Рис. 250.

Согласно основному построению 1*, две точки A и B можно соединить отрезком прямой, если $AB \leqslant l$. Докажем, что такой отрезок может быть построен с помощью инструментов ограниченных размеров также и в том случае, если $AB > l$.

Пусть A и B — две построенные точки (рис. 251). Проведём через точку A какой-либо отрезок a, а через точку B (тем же методом, что и в задаче 3) — пересекающий его отрезок b. Пусть C — точка их пересечения. Построим середину отрезка AC — точку D (задача 2). Проведём через точку D отрезок c параллельно отрезку b по ту же сторону прямой a, что и отрезок CB. В силу основного построения 2* можно считать, что отрезок $c \geqslant \frac{1}{2} BC$.

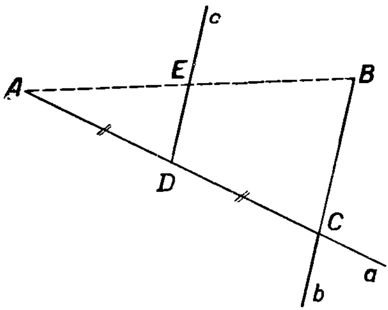

Рис. 251.

Отложим на отрезке c отрезок $DE = \frac{1}{2} BC$ (1-я вспомогательная задача). Легко заметить, что E — середина отрезка AB. Если $AE = BE \leqslant l$, то отрезок AB уже может быть построен. В противном случае можно таким же путём построить середины отрезков AE и BE и т. д. После конечного числа шагов всегда образуются отрезки прямой AB, каждый из которых $\leqslant l$, так что каждый из них (а следовательно, и их соединение) может быть построен.

После того как мы установили, что любые две точки могут быть соединены отрезком, можно уже не принимать во внимание ограничений в размерах линейки. При этом справедливость доказываемого предложения непосредственно следует из теоремы Штейнера (§ 4 этой главы), так как мы всегда имеем возможность избрать на плоскости какую-либо точку и построить окружность с центром в этой точке и любым заданным радиусом, меньшим r. Практически приёмы решения задач на построение с циркулем и линейкой ограниченных размеров не должны однако всегда копировать приёмы построений с линейкой и штейнеровой окружностью, так как здесь мы располагаем довольно широкими возможностями в проведении окружностей.

Пример 1. Из данной точки P опустить перпендикуляр на данную прямую a.

Обычный приём может быть использован лишь при условии, что расстояние точки P от прямой a не превышает r. С помощью инструментов ограниченных размеров эту задачу всегда можно решить следующим образом. Провести через точку P отрезок прямой, параллельный a (см. 3-ю вспомогательную задачу), а затем построить перпендикуляр к этому отрезку в точке P. Построение перпендикуляра к данной прямой в данной на ней точке может быть произведено общеизвестным способом независимо от ограничений в размерах инструментов.

Пример 2. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c и катету a, считая, что $a < r$, $c > r$.

Делим отрезок c на 2, 4, 8, ..., 2^n частей до тех пор, пока не получим $c_n = \frac{c}{2^n} < r$ (задача 2). Делим на столько же частей отрезок a, и пусть $a_n = \frac{a}{2^n}$.

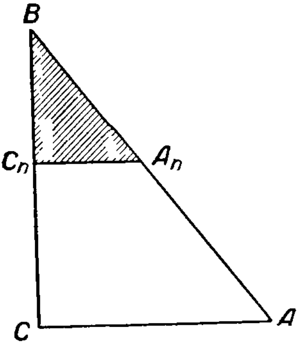

Рис. 252.

Строим вспомогательный прямоугольный треугольник A_nBC_n (см. рис. 252), такой, что его катет $BC_n = a_n$, а гипотенуза $A_nB = c_n$. На продолжении отрезка BC_n строим точку C так, чтобы $BC = a$ (задача 1). Проводим через точку C отрезок $CM \parallel C_nA_n$ и продолжаем отрезки CM и BA_n до их взаимного пересечения в точке A. Треугольник ABC искомый.

* * *

Мы уже видели, что задачи, решение которых сводится к построению корней уравнения 3-й степени, непроводимого над полем рациональных чисел, не могут быть решены циркулем и линейкой (гл. VII, § 3). Они не могут быть решены также с помощью двусторонней линейки или угольника. Установлено, что все такие задачи можно решить, если пользоваться линейкой с двумя пометками или двумя прямыми углами (примеры такого рода решений были приведены нами в гл. VII).

Наличие на плоскости каких-либо начерченных фигур часто расширяет конструктивные возможности того или иного инструмента. Наиболее яркий пример этого рода представляют построения с линейкой при наличии начерченной окружности (построения Штейнера). В древности Н и к о м е д использовал конхоиду для трисекции угла, Диоклес указал способ удвоения куба с привлечением циссоиды. Декартом (1596—1650) было обнаружено, что всякая задача третьей или четвёртой степени может быть решена циркулем и линейкой при наличии начерченной параболы. Ньютон (1643—1727) пришёл к такому же выводу относительно эллипса или гиперболы (полное доказательство этого предложения было дано в середине XIX в.).

Вопрос о построениях при наличии начерченных фигур освещён в книгах [1], [33], [35].

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие основные построения можно выполнить посредством циркуля и линейки?
2. Как читается теорема Мора — Маскерони? Когда она была доказана?
3. Какова основная идея доказательства теоремы Мора — Маскерони?
4. Какой общий приём существует для решения задач на построение с помощью только циркуля?
5. Как читается теорема Штейнера? Когда была доказана эта теорема?
6. Какова основная идея доказательства теоремы Штейнера?
7. Какая точка называется в конструктивной геометрии недоступной?
8. Каким образом можно задать недоступную точку?
9. Какие инструменты могут полностью заменить циркуль и линейку при построении фигур, состоящих из конечного числа точек? (Привести примеры.)
10. Каковы основные построения, производимые линейкой с параллельными краями? прямым углом? циркулем и линейкой ограниченных размеров?

ЗАДАЧИ

1. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Пользуясь только циркулем, построить точку D так, чтобы точки A, B, C и D были вершинами параллелограмма.

2. A и B — две противоположные вершины квадрата. Построить две другие его вершины, пользуясь только циркулем.

3. Даны две точки A и B. Построить точку C так, чтобы $\sphericalangle BAC = 90°$. Пользоваться только циркулем радиуса AB.

4. Даны точки A, B, C и D. Пользуясь только циркулем, построить точки M и N так, чтобы $MN = AB + CD$.

5. Даны две параллельные прямые и произвольная точка. Пользуясь только линейкой, провести через эту точку прямую, параллельную данным прямым.

6. В круге проведены диаметр и две параллельные между собой хорды. Построить центр круга, пользуясь только линейкой.

7. Пользуясь только линейкой, провести биссектрису данного угла, если начерчена вспомогательная окружность и отмечен её центр.

8. Провести медианы треугольника, считая его вершины недоступными.

9. Провести высоты треугольника, считая его вершины недоступными.

10. Провести касательную к окружности в данной на ней точке, не пользуясь центром окружности.

11. В конце данной дуги окружности провести касательную к этой окружности, не пользуясь центром.

12. Построить треугольник по трём заданным его сторонам, предполагая, что наибольший размах циркуля меньше наибольшей стороны, но больше её половины.

13. По гипотенузе и катету построить с помощью циркуля и линейки прямоугольный треугольник, предполагая, что наибольший размах циркуля меньше данного катета.

14. На данной прямой найти точки, находящиеся от данной точки на данном расстоянии d, предполагая, что наибольший размах циркуля меньше d.

15. Пользуясь только линейкой с параллельными краями, восставить перпендикуляр к данной прямой в данной её точке.

16. Удвоить данный отрезок, пользуясь только двусторонней линейкой.

17. Пользуясь только прямым углом, разделить данный угол пополам.

18. Заданы три точки окружности. Построить с помощью циркуля и линейки ещё какую-либо точку этой окружности, не проводя окружности.

ЛИТЕРАТУРА

На русском языке

1. Адлер А. Теория геометрических построений, Учпедгиз, 1940.

2. Адамар Ж. Элементарная геометрия, ч. 1, Учпедгиз, 1948.

3. Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение, Учпедгиз, 1950.

4. Воронец А. Геометрия циркуля, ОНТИ, 1934.

5. Глаголев Н. А. Элементарная геометрия, ч. 1.

6. Глаголев Н. А. Сборник геометрических задач на построение, М., 1903.

7. Делоне Б. и Житомирский О. Задачник по геометрии, ГТТИ, 1941.

8. Зетель С. Геометрия линейки и геометрия циркуля, Изд. АПН, 1950.

9. Киселёв А. Геометрия, ч. 1.

10. Кутузов Б. Геометрия, Учпедгиз, 1950.

11. Курант Р. и Робинс Г. Что такое математика, ГТТИ, 1947.

12. Лебедев В. И. Очерки по истории точных наук, вып. 4, Знаменитые задачи древности, 1921.

13. Моденов П. Геометрические преобразования, „Математика в школе", 1948, № 6.

14. Назарьев С. В. и др. Сборник задач по геометрии, Учпедгиз, 1948.

15. Никулин Н. А. Геометрические построения с помощью простейших инструментов, 1947.

16. „Начала Евклида", ГИТТЛ, 1948.

17. Некрасов П. А. Приложения алгебры к геометрии, М., 1897.

18. Нестерович Н. М. Геометрические построения в плоскости Лобачевского, ГИТТЛ, 1951.

19. Перепёлкин Д. И. Геометрические построения в средней школе, М. — Л., 1947.

20. Перепёлкин Д. И. Курс элементарной геометрии, ГТТИ, 1948.

21. Радемахер Г. и Теплиц О. Числа и фигуры, 1936.

22. Романовский В. О геометрических построениях при помощи циркуля и постоянной прямой, ВОФЭМ, № 563—564, 1912.

23. Фурсенко В. Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольников, „Математика в школе", 1937, № 5—6.

24. Цюльке П. Геометрические построения на ограниченном куске плоскости, 1936.

25. Четверухин Н. Ф. Методы геометрических построений. Учпедгиз, 1952.

26. Четверухин Н. Ф. Геометрические построения и приближения, 1935.

27. Четверухин Н. Ф. Вопросы методологии и методики геометрических построений, АПН, 1946.

28. Шатуновский С. О. Об измерении прямолинейных отрезков и построении их при помощи циркуля и линейки, 1926.

29. Шатуновский С. О. Предисловие к книге Адлера „Теория геометрических построений".

30. Школьник А. Г. Задача деления круга, Учпедгиз, 1948.

31. Штейнер Я. Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой и неподвижного круга, 1939.

32. Яглом И. М. Геометрические преобразования, ГИТТЛ, М., 1955.

На иностранных языках

33. Bieberbach L. Theorie der geometrischen Konstruktionen Basel, 1952.

34. Lebesgue H. Leçons sur constructions géometriques, Paris, 1950.

35. Vahlen T. Konstruktionen und Approximationen, Leipzig, 1910.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава VII. Некоторые задачи, не разрешимые циркулем и линейкой

Глава VIII. Геометрические построения при различных ограничениях

Борис Иванович Аргунов и *Марк Беневич Балк*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ
НА ПЛОСКОСТИ

Редактор *Н. М. Остиану*
Переплёт художника *Ю. М. Сигова*
Художественный редактор *М. Л. Фрам*
Технический редактор *Г. И. Смирнов*
Корректор *М. С. Паевич*

* * *

Сдано в набор 3/XI 1956 г. Подписано к печати 8/IV 1957 г. $84 \times 108^1/_{32}$. Печ. л. 16,75 (13,73). Уч.-изд. л. 14,29. Тираж 20 000 экз. Заказ № 1678.

* * *

Учпедгиз. Москва, Чистые пруды, 6.

Министерство культуры СССР.
Главное управление полиграфической промышленности. 4-я тип. им. Евг. Соколовой
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Цена без переплёта 4 р. 30 к. Переплёт 1 р. 50 к.